

---

## Chapitre 26. Fonctions de plusieurs variables.

---

$\mathbb{R}^2$  est muni du produit scalaire usuel et de la norme associée :

$$\forall u = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall v = (x', y') \in \mathbb{R}^2, \quad u \cdot v = xx' + yy' \quad \text{et} \quad \|u\| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \|u\|^2 = x^2 + y^2.$$

### 1 Ouverts de $\mathbb{R}^2$ , continuité

#### 1.a Définitions

**Définition :**

Soit  $a \in \mathbb{R}^2$  et  $r > 0$ .

On appelle boule ouverte (ou bien disque ouvert) de centre  $a$  et de rayon  $r$  la partie suivante de  $\mathbb{R}^2$  :

$$B(a, r) = \{u \in \mathbb{R}^2 / \|u - a\| < r\}.$$


---

**Définition :**

On dit qu'une partie  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  est ouverte (ou que c'est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ ) si :

$$\forall a \in U, \exists r > 0, \quad B(a, r) \subset U.$$


---

Rappelons la définition de la continuité en un  $a \in I$ , avec  $I$  intervalle de  $\mathbb{R}$  d'une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \quad \forall x \in I \cap [a - r, a + r], \quad |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

Comment adapter cette définition si on remplace  $I \subset \mathbb{R}$  par  $U \subset \mathbb{R}^2$  ?

- Au lieu de  $a \in I$ , on prend  $a = (x_0, y_0) \in U$ , et le "petit intervalle  $[a - r, a + r]$  centré en  $a$ " va être remplacé par "la petite boule  $B((x_0, y_0), r)$  centrée en  $(x_0, y_0)$ ";
- On va imposer que  $U$  soit un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , ce qui permet d'être sûr qu'en prenant  $r$  suffisamment petit,  $B(a, r) \subset U$ , donc pas besoin d'écrire  $U \cap B(a, r)$  !

**Définition :**

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^2$ . On dit que  $f$  est continue en  $(x_0, y_0) \in U$  si :

---

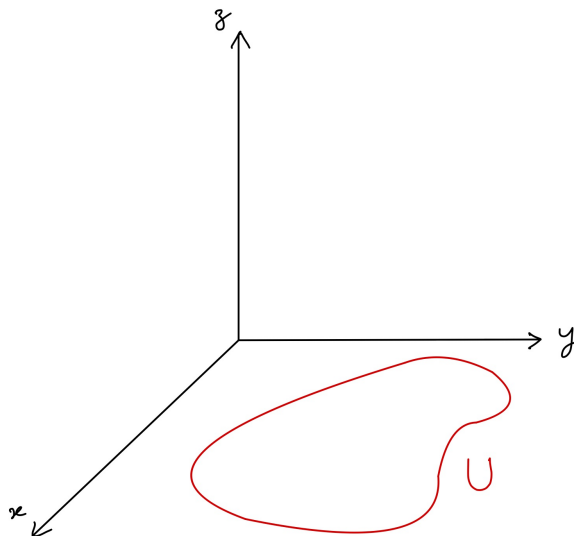
## 1.b Représentation graphique d'une fonction de deux variables, à valeurs réelles

Soit  $U$  une partie de  $\mathbb{R}^2$ , et  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(x, y) \mapsto f(x, y)$

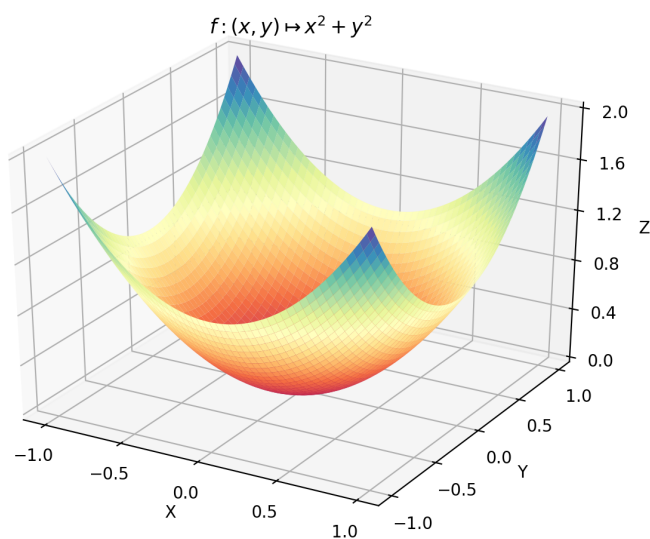
Le graphe de  $f$  est la surface d'équation  $z = f(x, y)$   
 avec  $(x, y) \in U$ .

Autrement dit, c'est la partie de l'espace  $\mathbb{R}^3$  suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in U \text{ et } z = f(x, y)\} \\ &= \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in U\} \end{aligned}$$

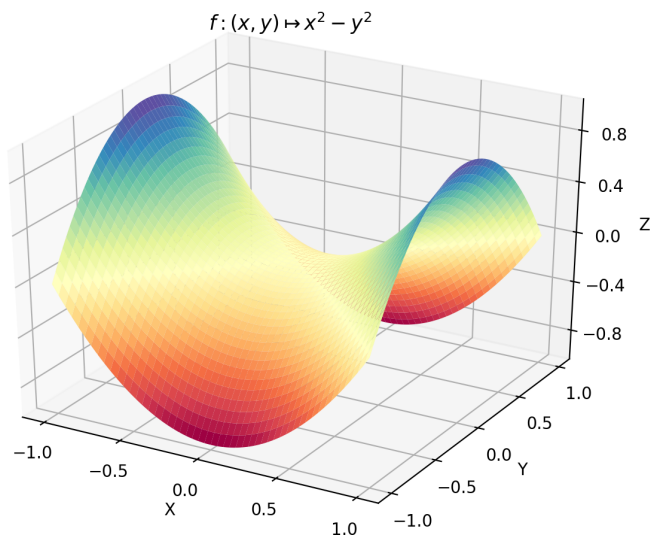


Voici quelques exemples de représentations :



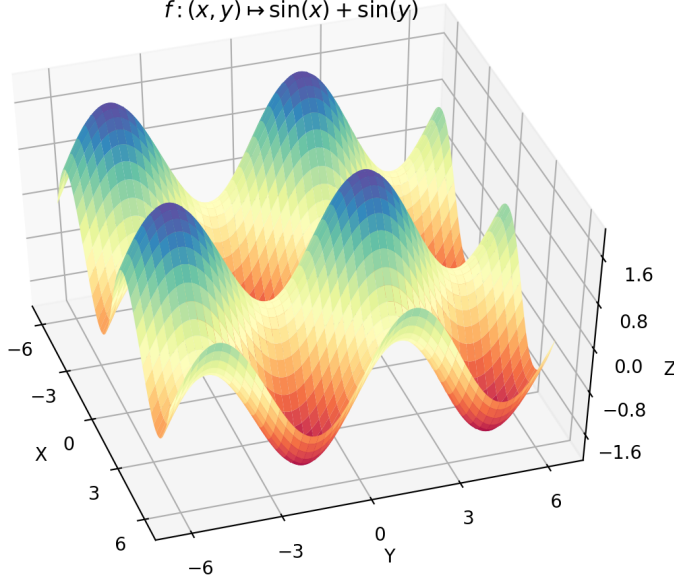
$f: (x, y) \mapsto x^2 + y^2$  sur  $U = [-1, 1]^2$

$f: (x, y) \mapsto x^2 - y^2$  sur  $U = [-1, 1]^2$



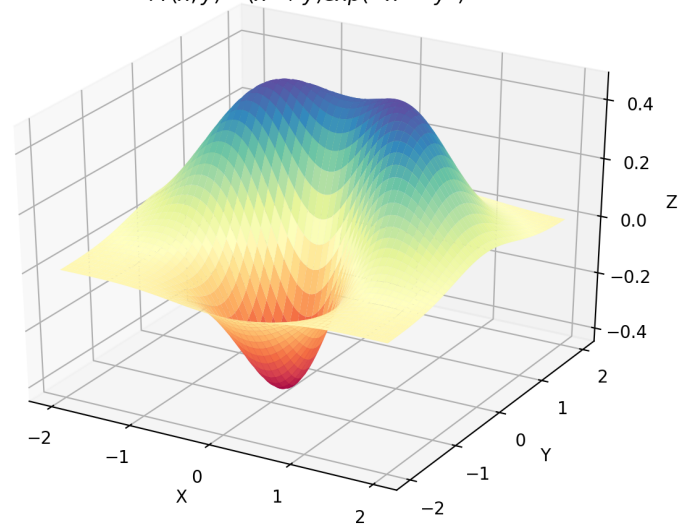
Sur  $U = [-2\pi, 2\pi]^2$  :

$$f: (x, y) \mapsto \sin(x) + \sin(y)$$

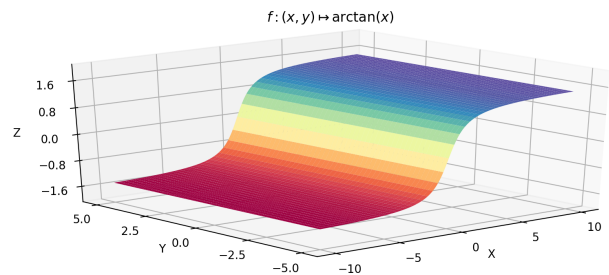


Sur  $U = [-2, 2]^2$  :

$$f: (x, y) \mapsto (x^2 + y^2)\exp(-x^2 - y^2)$$



$$f: (x, y) \mapsto \text{Arctan}(x) \text{ sur } U = [-10, 10] \times [-5, 5]$$

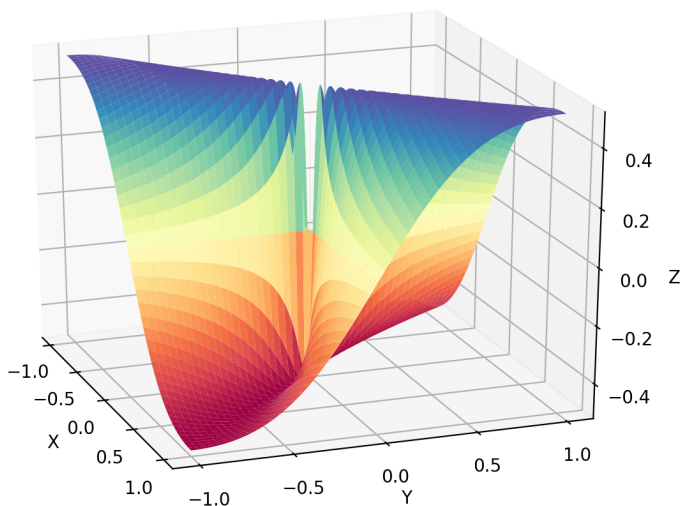


**Un exemple de fonction non continue :**

Posons  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$f$  non continue en  $(0, 0)$



Dans tout le reste du chapitre,  $f$  désigne une fonction à valeurs réelles, définie sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ , et  $\mathcal{S}$  est la surface d'équation  $z = f(x, y)$ .

## 2 Dérivées partielles

### 2.a Définitions, exemples

On s'intéresse souvent aux applications partielles de  $f$  : ce sont les fonctions d'une seule variable réelle que l'on obtient en fixant l'autre variable :

#### Définition :

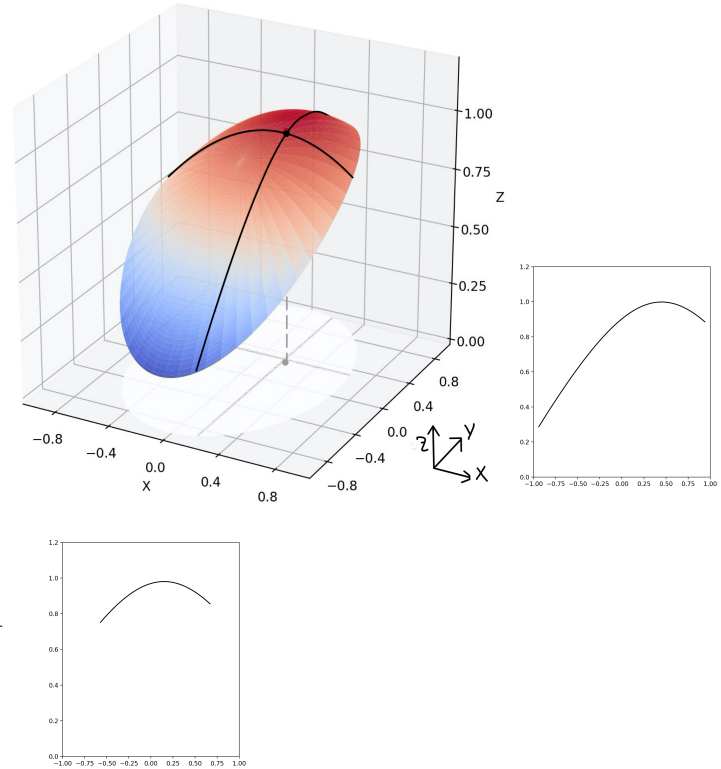
Soit  $(x_0, y_0) \in U$ .

- La 1<sup>ère</sup> application partielle de  $f$  en  $y_0$  est l'application  $x \mapsto f(x, y_0)$ .

On la notera parfois  $f(\cdot, y_0)$ .

- La 2<sup>ème</sup> application partielle de  $f$  en  $x_0$  est l'application  $y \mapsto f(x_0, y)$ .

On la notera parfois  $f(x_0, \cdot)$ .



#### Définition :

Soit  $(x_0, y_0) \in U$ .

- La première dérivée partielle de  $f$  en  $(x_0, y_0)$ , notée  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ , est, si elle existe, la dérivée en  $x_0$  de la première application partielle de  $f$  en  $y_0$ .

Autrement dit, on note :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

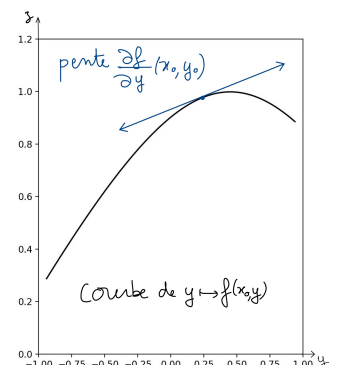
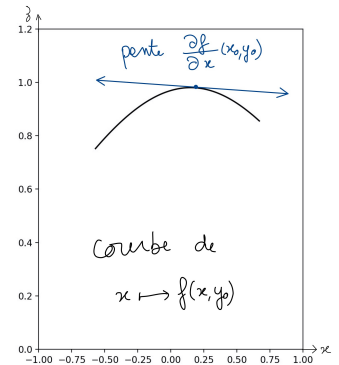
si cette limite existe et est finie.

- De même, la deuxième dérivée partielle de  $f$  en  $(x_0, y_0)$ , notée  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ , est, si elle existe, la dérivée en  $y_0$  de la deuxième application partielle de  $f$  en  $x_0$ .

Autrement dit, on note :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

si cette limite existe et est finie.



Exemples de calcul :

- $f : (x, y) \mapsto xy^2 - \frac{1}{x}$

- $f : (x, y) \mapsto \sin(x - y)$

- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Nous allons voir qu'en tout  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ , même en  $(0, 0)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$  existent :

Mais pourtant  $f$  n'était pas continue partout!<sup>1</sup>

Ainsi, l'existence de  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sur  $U$  ne suffit pas pour conclure que  $f$  est continue sur  $U$ . Cependant :

**Définition :**

On dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$  si, en tout  $(x_0, y_0) \in U$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$  existent, et si les fonctions  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sont continues sur  $U$ .

**Proposition :**

Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$ , alors elle est continue sur  $U$ .

---

1. Ce qui peut être surprenant, car pour les fonctions d'une variable réelle, la dérivabilité en un point implique la continuité en ce point.

## 2.b Formule de Taylor à l'ordre 1

Lorsqu'on a une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ , on a un développement limité d'ordre 1 en tout point grâce à la formule de Taylor-Young à l'ordre 1 suivante :

**Proposition :**

On suppose  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$ . Soit  $(x_0, y_0) \in U$ .

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \underset{\|(h,k)\| \rightarrow 0}{=} f(x_0, y_0) + h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + o(\|(h, k)\|)$$

Comparons à la formule de Taylor-Young pour une fonction  $f$  d'une seule variable, de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ ; on écrivait, pour  $a \in I$  :

$$f(a + h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + hf'(a) + o(h)$$

Faisons les analogies :

- Le point  $a$  de  $I$  est remplacé par un point  $A = (x_0, y_0)$  de  $U$
- Le réel  $h$  qui va tendre vers 0 est remplacé par un petit vecteur  $\vec{u} = (h, k)$  de  $\mathbb{R}^2$ .  
On peut alors écrire  $(x_0 + h, y_0 + k) = A + \vec{u}$ .  
On fait "tendre ce vecteur vers  $\vec{0}$ " au sens suivant :  $\|\vec{u}\| \rightarrow 0$ .
- Et le terme  $hf'(a)$  ?  
On aimerait voir les termes  $h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$  comme un produit scalaire.  
On définit pour cela un vecteur appelé gradient de  $f$  en  $A$  :

**Définition :**

Soit  $(x_0, y_0) \in U$  tel que  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$  existent.

Le vecteur de  $\mathbb{R}^2$  de coordonnées  $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$  est appelé gradient de  $f$  en  $(x_0, y_0)$ , il est noté  $\nabla f(x_0, y_0)$ .

$$\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Avec les mêmes notations que plus haut :

$$\vec{u} \cdot \nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \text{ comme espéré !}$$

La formule de Taylor-Young à l'ordre 1 se réécrit :

$$f(A + \vec{u}) \underset{\|\vec{u}\| \rightarrow 0}{=} f(A) + \vec{u} \cdot \nabla f(A) + o(\|\vec{u}\|)$$

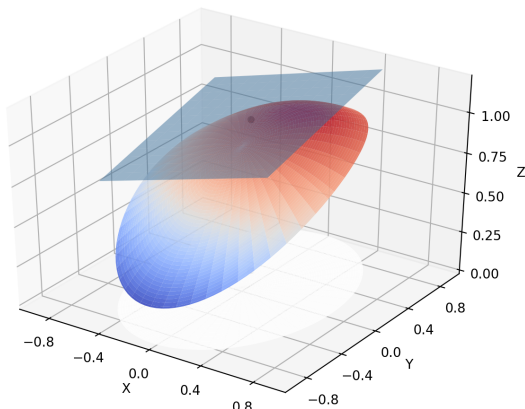
## 2.c Plan tangent

On suppose que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$ .

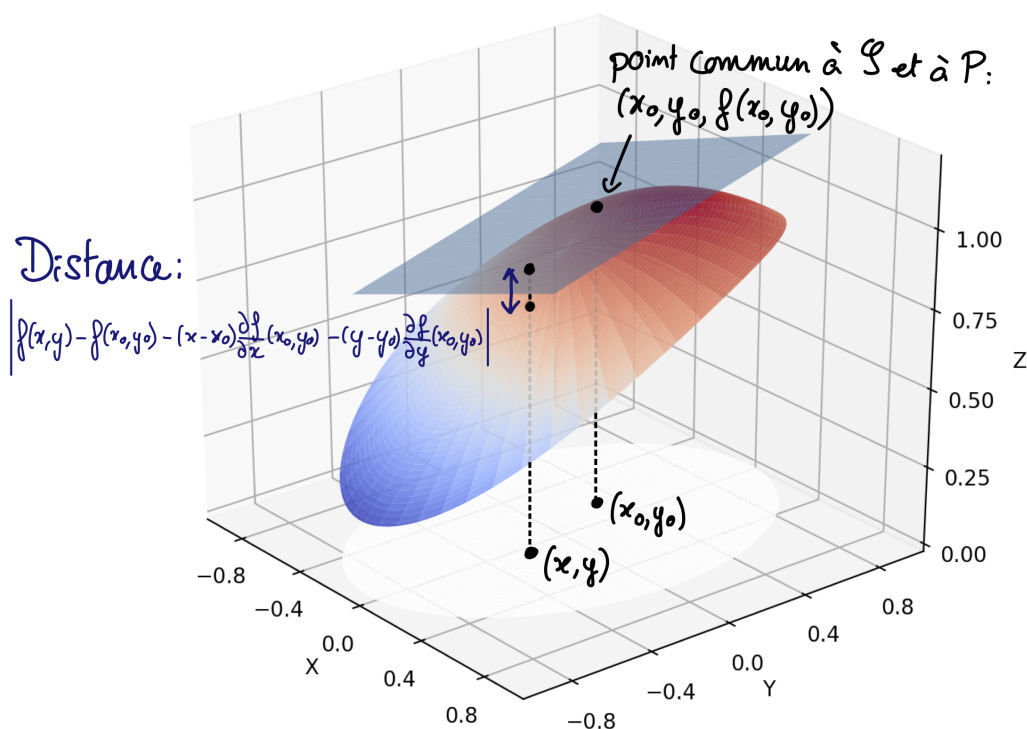
En notant  $(x, y) = (x_0 + h, y_0 + k)$ , la formule de Taylor-Young se réécrit :

$$f(x, y) \underset{\|(x-x_0, y-y_0)\| \rightarrow 0}{=} f(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + o(\|(x - x_0, y - y_0)\|)$$

Notons  $P$  le plan d'équation  $z = f(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$  : on l'appelle le plan tangent à  $\mathcal{S}$  en  $(x_0, y_0)$ .



La formule nous dit qu'un point  $((x, y, f(x, y)))$  de  $\mathcal{S}$ , si  $(x, y)$  est "proche" de  $(x_0, y_0)$ , est "très" proche du point  $(x, y, z)$  du plan  $P$ . Plus précisément, la distance entre les deux points est négligeable devant la longueur  $\|(x - x_0, y - y_0)\|$  :



Les deux autres points sont  $(x, y, f(x, y))$  (le plus bas, sur  $\mathcal{S}$ )  
 et  $(x, y, f(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0))$  (sur  $P$ )

### 3 Composition

#### 3.a Dérivée selon un vecteur

**Définition :**

Soit  $a = (x_0, y_0) \in U$  et  $\vec{v}$  un vecteur non nul de  $\mathbb{R}^2$ .

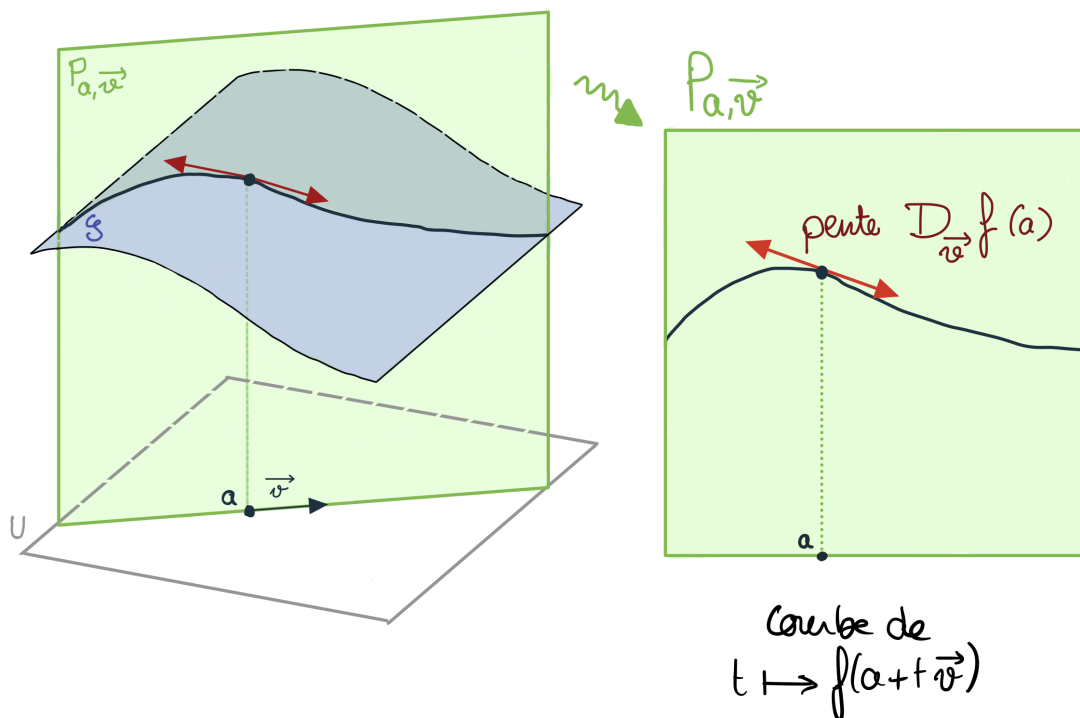
La dérivée de  $f$  selon le vecteur  $\vec{v}$  en  $a = (x_0, y_0)$ , notée  $D_{\vec{v}}f(x_0, y_0)$ , est, si elle existe, la dérivée en 0 de la fonction  $t \mapsto f(a + t \cdot \vec{v})$ .

Autrement dit, si la limite existe et est finie :

$$D_{\vec{v}}f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t\vec{v}) - f(a)}{t} \quad \text{ou encore} \quad D_{\vec{v}}f(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t\alpha, y_0 + t\beta) - f(x_0, y_0)}{t}$$

en notant  $\vec{v} = (\alpha, \beta)$ .

Interprétation graphique :



Si on note  $P_{a,\vec{v}}$  le plan orthogonal au plan  $xOy$ , contenant  $a$  et  $\vec{v}$ , la courbe de  $t \mapsto f(a + t \cdot \vec{v})$  apparaît comme intersection entre la surface  $\mathcal{S}$  et le plan  $P_{a,\vec{v}}$ . Le nombre  $D_{\vec{v}}f(a)$  est la pente de cette courbe au niveau du point  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ .

**Remarque :**

Avec  $\vec{v} = (1, 0)$ , on reconnaît la définition de  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  ; graphiquement, on intersecte la surface avec le plan d'équation  $y = y_0$ .

Avec  $\vec{v} = (0, 1)$ , on reconnaît la définition de  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$  ; graphiquement, on intersecte la surface avec le plan d'équation  $x = x_0$ .

### Expression à l'aide du gradient

Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$ , en notant  $\vec{v} = (\alpha, \beta)$ , on a  $\|(t\alpha, t\beta)\| \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$  et un  $o(\|(t\alpha, t\beta)\|) = o(t)$ , donc d'après la formule de Taylor-Young à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + t\alpha, y_0 + t\beta) - f(x_0, y_0)}{t} &\stackrel{t \rightarrow 0}{=} \frac{f(x_0, y_0) + t\alpha \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + t\beta \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + o(t) - f(x_0, y_0)}{t} \\ &\stackrel{t \rightarrow 0}{=} \alpha \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \beta \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + o(1) \end{aligned}$$

La limite en 0 est donc  $\alpha \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \beta \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$  : on reconnaît le produit scalaire  $\vec{v} \cdot \nabla f(x_0, y_0)$  !

Ainsi :

$$\boxed{\text{Pour } f \text{ de classe } \mathcal{C}^1, \quad D_{\vec{v}}f(x_0, y_0) = \vec{v} \cdot \nabla f(x_0, y_0)}$$

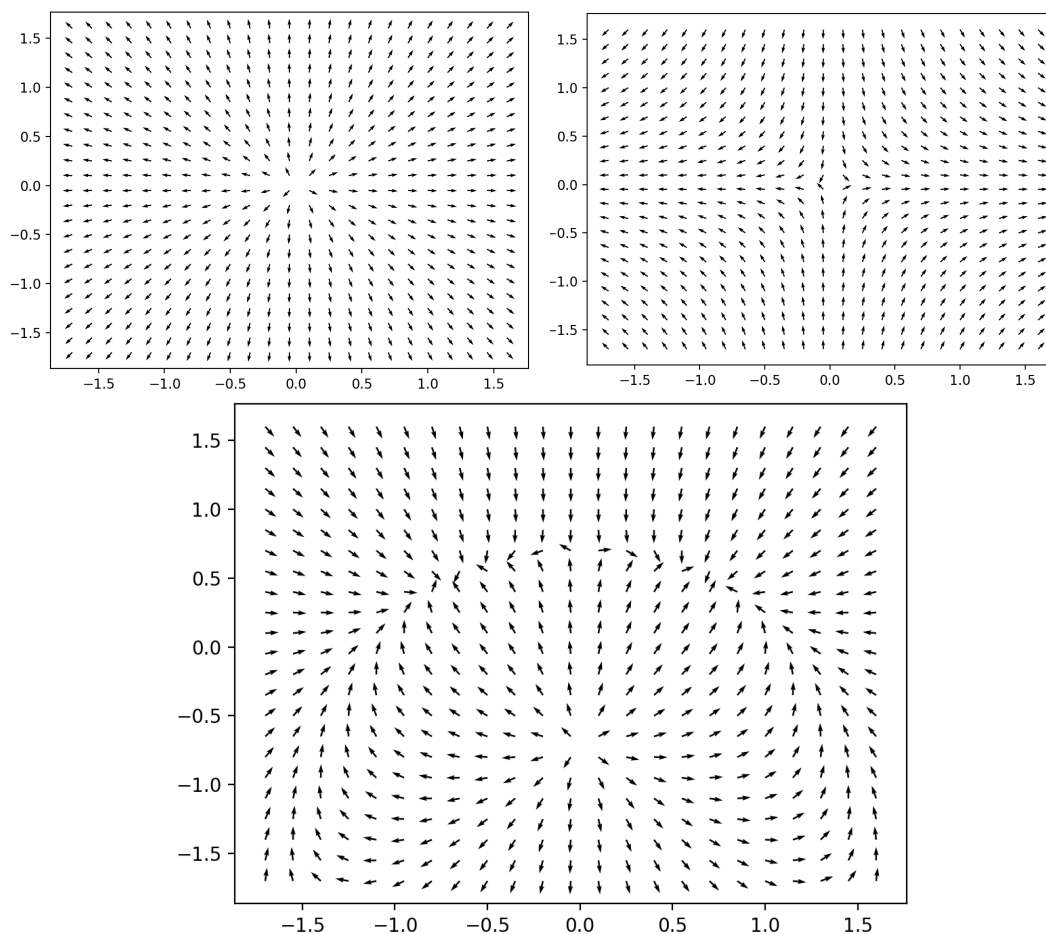
Fixons  $(x_0, y_0) \in U$ .

Si on fait varier  $\vec{v}$  tout en imposant  $\vec{v}$  unitaire, comme la norme de  $\nabla f(x_0, y_0)$  est fixée, cette quantité est maximale quand les vecteurs  $\nabla f(x_0, y_0)$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires et de même sens.

Donc la dérivée  $D_{\vec{v}}f(x_0, y_0)$  est maximale dans la direction indiquée par le vecteur  $\nabla f(x_0, y_0)$ .

Ainsi,  $\boxed{\text{Le gradient } \nabla f(x_0, y_0) \text{ indique la direction dans laquelle } f \text{ croît le plus vite!}}$

Il est alors intéressant de représenter, sur la surface  $U \subset \mathbb{R}^2$  (donc dans le plan), les vecteurs  $\nabla f(x_0, y_0)$  en tout  $(x_0, y_0)$  : on peut deviner la forme de la surface  $\mathcal{S} \dots$  Voici le champ de gradient<sup>2</sup> de fonctions dont on a représenté les surfaces en 1.b. Sauriez-vous retrouver desquelles il s'agit ?



2. On a normé les vecteurs pour plus de lisibilité.

### 3.b Dérivée le long d'un arc paramétré

On suppose que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$ .

On se donne deux fonction d'une variable réelle, définies sur un même intervalle  $I$ ,  $x : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $\mathcal{C}^1$ , telles que pour tout  $t \in I$ ,  $(x(t), y(t)) \in U$ .

Autrement dit, on se donne une courbe paramétrée  $\Gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ ,  $t \in I$ , incluse dans  $U$ .

Cela permet de définir :

$$\begin{aligned} \varphi : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(x(t), y(t)) \end{aligned}$$

Avec ces notations et hypothèses :

**Proposition :**

$\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ , et pour tout  $t \in I$ ,

**Exemple :** Prenons  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  et intéressons-nous à  $\varphi : t \mapsto f(t^2, \cos t)$ .

**Lien avec le gradient, interprétation géométrique :**

La courbe plane  $\Gamma$ , paramétrée par  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ ,  $t \in I$ , peut être tracée sur  $U$  dans le plan horizontal.

Cela correspond à la trajectoire d'un point mobile se trouvant en  $(x(t), y(t))$  à l'instant  $t$ .

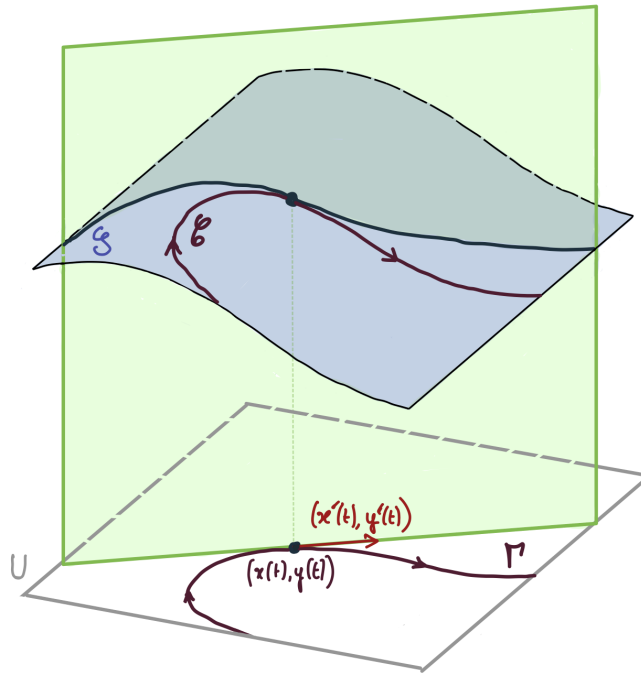
On peut poser  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ , de sorte que  $\varphi(t) = (f \circ \gamma)(t)$  ;

et  $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$  : ce dernier vecteur est le vecteur vitesse à l'instant  $t$ .

La proposition dit alors que  $\varphi'(t) = \gamma'(t) \cdot \nabla f(x(t), y(t))$ , ce que l'on peut écrire :

$$\boxed{\forall t \in I, (f \circ \gamma)'(t) = \gamma'(t) \cdot \nabla f(\gamma(t))}$$

On reconnaît la dérivée de  $f$  selon le vecteur vitesse  $(x'(t), y'(t))$ , au point  $(x(t), y(t))$ ...



On peut définir la courbe de l'espace  $\mathcal{C}$  paramétrée par 
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = f(x(t), y(t)) \end{cases}, t \in I.$$

Cette courbe est tracée sur la surface  $\mathcal{S}$ .

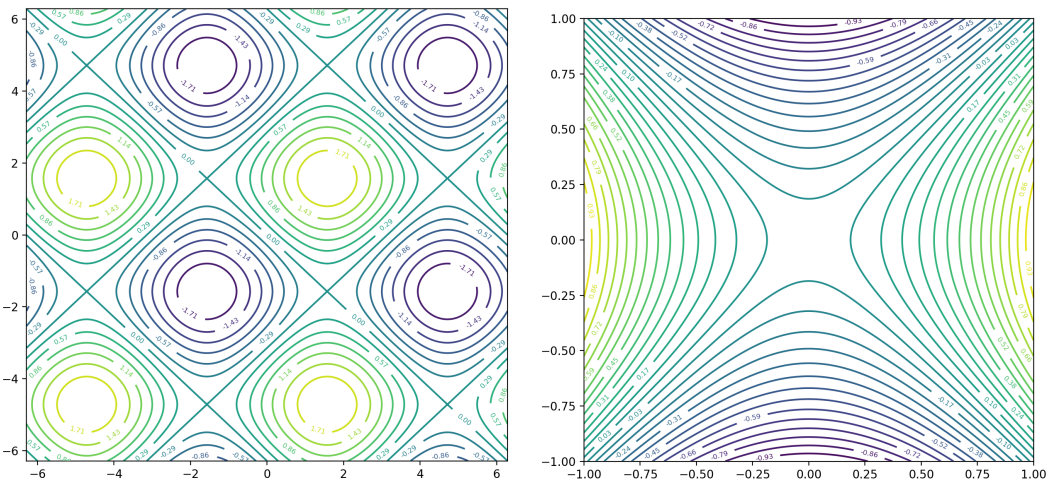
$\varphi'(t)$  donne la pente de la tangente à  $\mathcal{C}$  au point  $t$ , dans le plan vertical contenant le point  $(x(t), y(t))$  et le vecteur vitesse  $(x'(t), y'(t))$ .

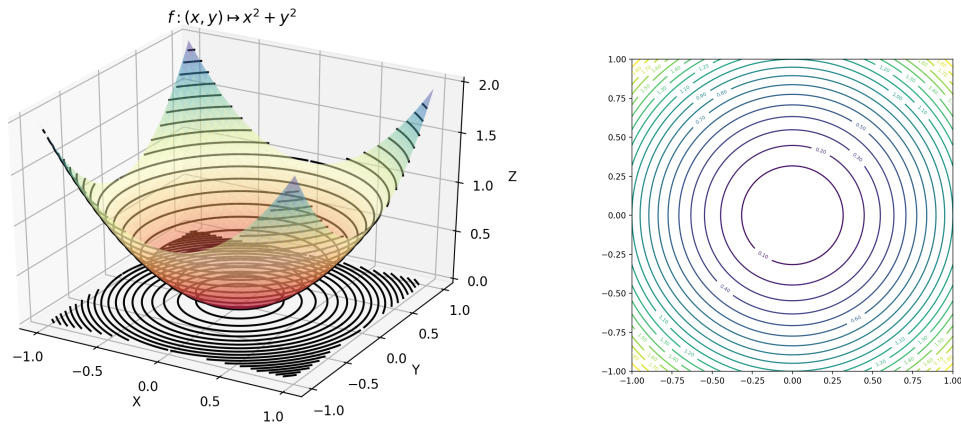
### 3.c Lignes de niveau et gradient

#### Définition :

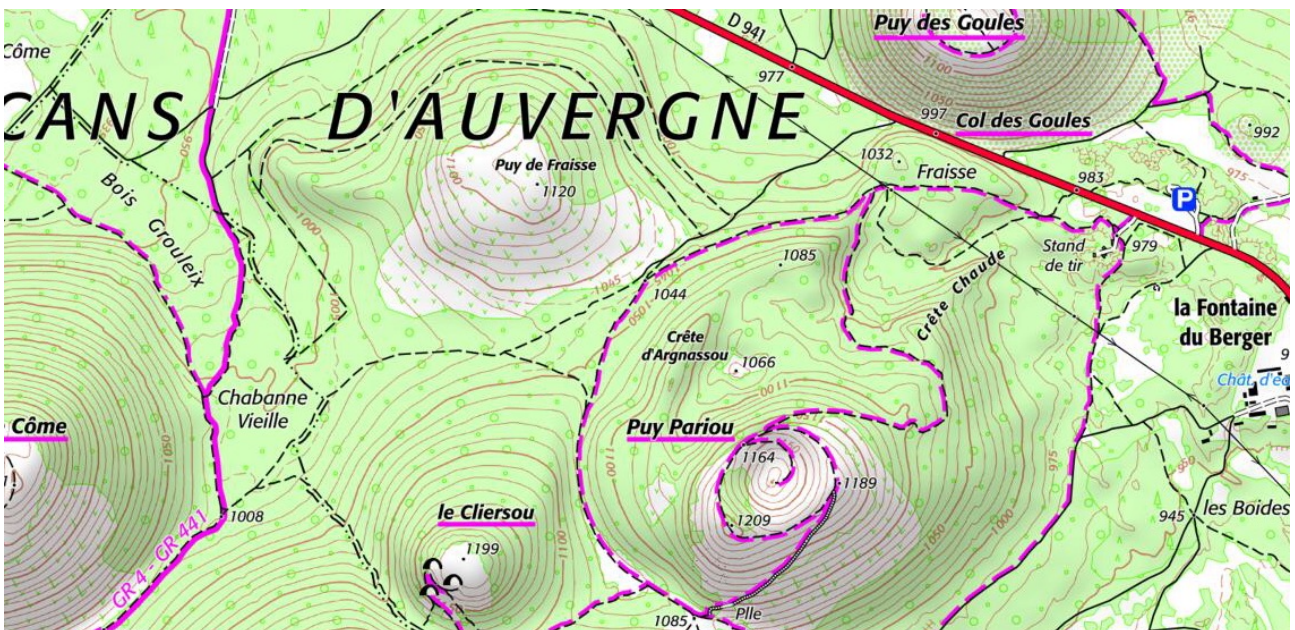
On appelle lignes de niveau de  $f$  les courbes planes d'équation  $f(x, y) = k$ , avec  $k \in \mathbb{R}$  constante.

Pour  $f : (x, y) \mapsto \sin(x) + \sin(y)$  sur  $U = ] - 2\pi, 2\pi[$  et pour  $f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$  sur  $U = ] - 1, 1[$ , voici quelques lignes de niveau :





Sur une carte de randonnée, on trouve les lignes de niveau pour l'altitude :  $f(x, y)$  étant l'altitude au point de la surface de coordonnées  $(x, y)$ ...



Admettons que les lignes de niveau de  $f$  puissent être paramétrées; fixons  $k \in \mathbb{R}$  et considérons un paramétrage  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$  pour  $t \in I$ , de la ligne de niveau  $\Gamma_k$  d'équation  $f(x, y) = k$ , et supposons que  $x$  et  $y$  soient de classe  $\mathcal{C}^1$  sur l'intervalle  $I$ .

Pour tout  $t \in I$ ,  $f(x(t), y(t)) = k$ ; en reprenant les notations de la partie 3.b, cela signifie que la fonction  $\varphi$  est constante sur  $I$ !

Elle est dérivable donc on peut affirmer que sa dérivée est nulle :

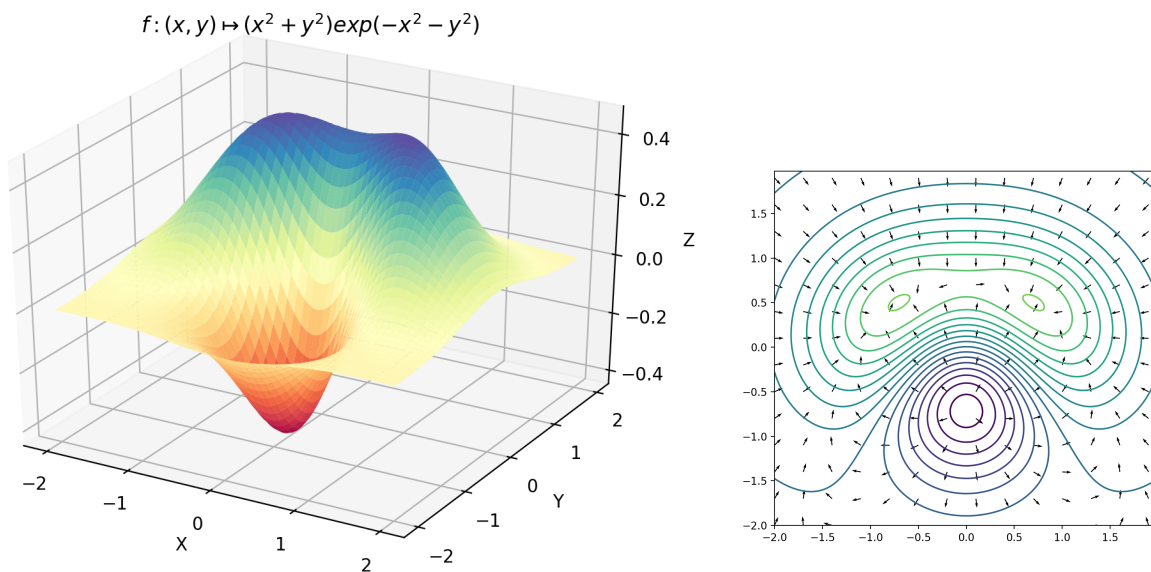
$$\forall t \in I, \varphi'(t) = 0 \text{ i.e. } \gamma'(t) \cdot \nabla f(x(t), y(t)) = 0$$

Ainsi, pour tout  $t \in I$ , le gradient de  $f$  au point  $(x(t), y(t))$  est orthogonal à  $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$ , qui le vecteur tangent à  $\Gamma_k$  au point  $(x(t), y(t))$ ... c'est le sens d'être orthogonal à la courbe!

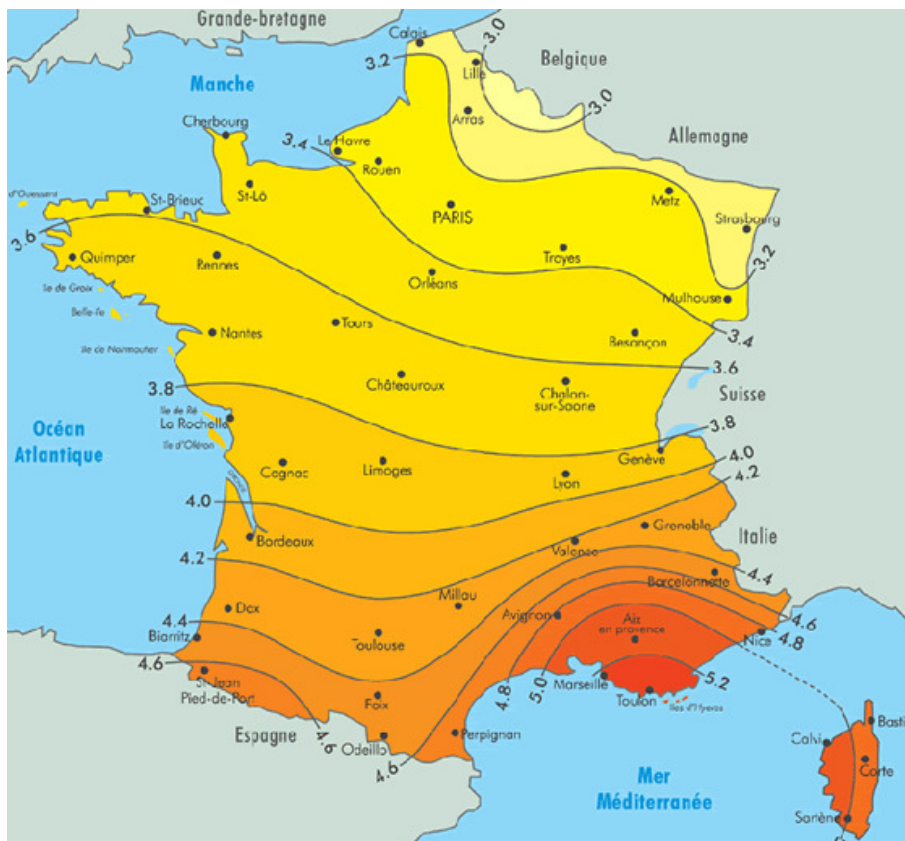
Finalement :

Le gradient de  $f$  est orthogonal aux lignes de niveau de  $f$ .

Rappelons que le gradient est dans la direction où la fonction  $f$  croît le plus vite ; il est alors intéressant de tracer sur un même graphique les lignes de niveau et le champ des vecteurs gradients. Reprenons un exemple précédent :



Plaçons les vecteurs gradients sur cette carte, qui donne quelques lignes de niveau pour l'ensoleillement en France (en  $kWh.m^2/jour$ ) :



### 3.d Changement de variables

Soit  $V$  un autre ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , et  $\varphi, \psi$ , deux fonctions de deux variables, à valeurs réelles, définies sur  $V$ , et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $V$ .

On suppose que :

$$\forall (u, v) \in V, (\varphi(u, v), \psi(u, v)) \in U$$

Donc la fonction suivante est bien définie :

$$\begin{aligned} g : V &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \end{aligned}$$

Lorsque l'on fixe  $v = v_0$ , autrement dit lorsqu'on s'intéresse à la première application partielle de  $g$ , on constate qu'on est dans le cadre de la partie 3.b, en remplaçant  $t \mapsto x(t)$  par  $u \mapsto \varphi(u, v_0)$  et  $t \mapsto y(t)$  par  $u \mapsto \psi(u, v_0)$ . Ces fonctions sont bien de classe  $\mathcal{C}^1$  et leurs dérivées sont  $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$  et  $\frac{\partial \psi}{\partial u}$ . Donc le résultat de 3.b s'applique et nous donne :

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) + \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u, v), \psi(u, v))$$

Pour alléger, on écrit souvent :

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial u}$$

Allons encore plus loin dans l'abus de langage : on ira jusqu'à écrire " $x = \varphi(u, v)$ " et " $y = \psi(u, v)$ ", d'où l'écriture "physicienne"<sup>3</sup> :

De même :

#### Exemples

- Avec  $U = V = \mathbb{R}^2$ ,  $\varphi(u, v) = u^2v$ ,  $\psi(u, v) = u - v$  : on s'intéresse à  $g : (u, v) \mapsto f(u^2v, u - v)$ .

- Avec  $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ ,  $V = \mathbb{R}_+^* \times ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ,  $\varphi(r, \theta) = r \cos \theta$  et  $\psi(r, \theta) = r \sin \theta$  : cela revient à passer en coordonnées polaires  $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ ,  $g(r, \theta) = f(x, y)$ .

---

3. Les physiciens vont encore plus loin en ne donnant pas un autre nom à la fonction  $g$ , i.e. en la notant encore  $f$ ...

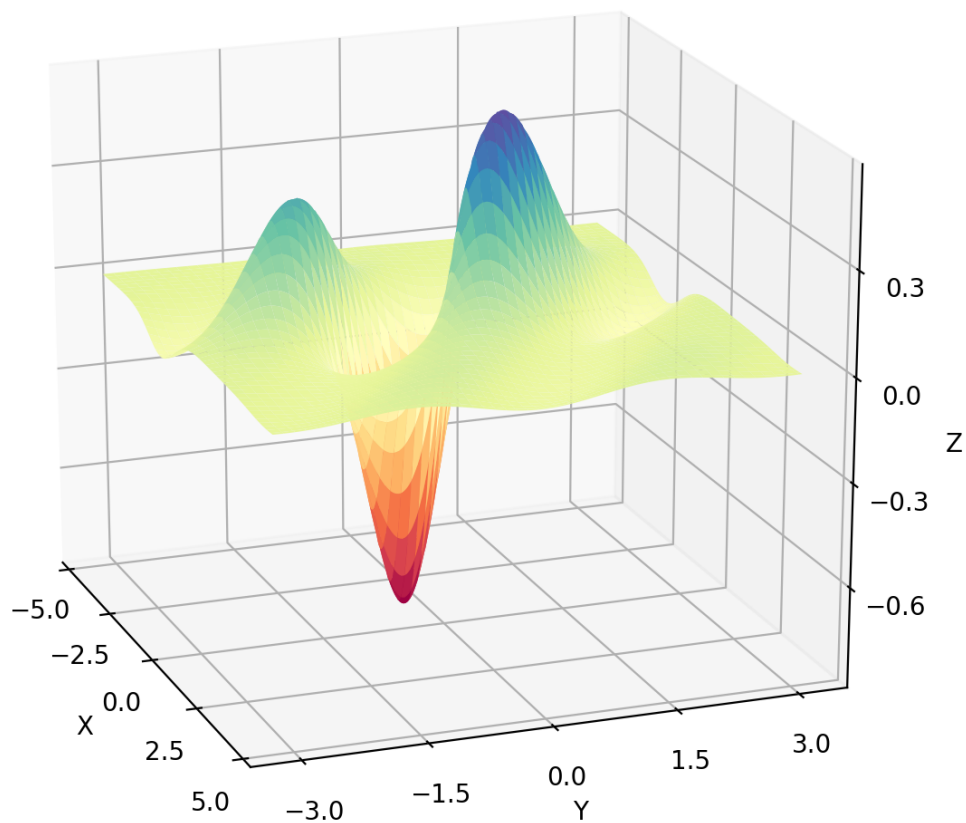
## 4 Extremas

On rappelle que  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et qu'on suppose  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$ .

**Définition :**

Soit  $a = (x_0, y_0) \in U$ .

- On dit que  $f$  admet un maximum global en  $(x_0, y_0)$  si :
- On dit que  $f$  admet un minimum global en  $(x_0, y_0)$  si :
- On dit que  $f$  admet un extremum global en  $(x_0, y_0)$  si elle admet un minimum global ou un maximum global en ce point.
- On dit que  $f$  admet un maximum (local) en  $(x_0, y_0)$  si :
- On dit que  $f$  admet un minimum (local) en  $(x_0, y_0)$  si :
- On dit que  $f$  admet un extremum (local) en  $(x_0, y_0)$  si elle admet un minimum local ou un maximum local en ce point.



### Théorème :

Soit  $(x_0, y_0) \in U$ .

Si  $f$  admet un extremum (local) en  $(x_0, y_0)$ , alors  $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$  (i.e. :  $\nabla f(x_0, y_0) = \vec{0}$ ).

Preuve rapide : Il suffit de se rappeler le résultat pour les fonctions d'une variable, c.f. Ch 12!

Supposons que  $f$  ait un extremum local en  $(x_0, y_0)$ . Les applications partielles admettent aussi un extremum local, en un point  $t_0$  ( $x_0$  pour l'une,  $y_0$  pour l'autre) qui est bien intérieur à leur domaine de définition (grâce à l'hypothèse que  $U$  est un ouvert). Comme elles sont dérivables grâce à l'hypothèse que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , leurs dérivées respectives s'annulent au point considéré, ce qui correspond exactement à :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

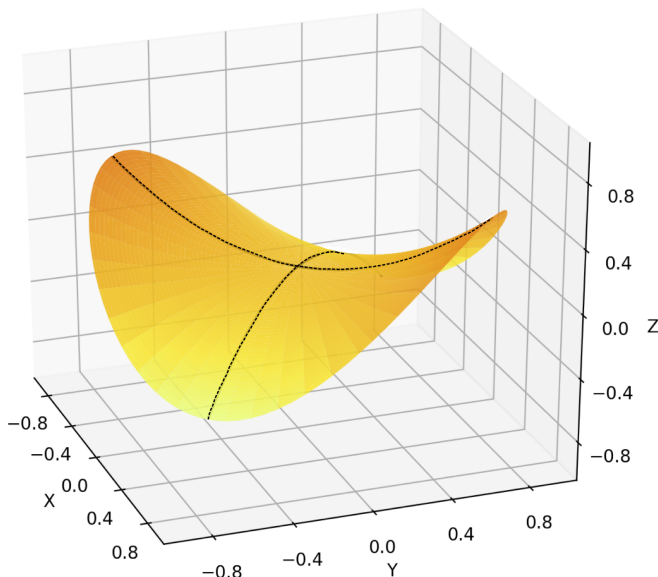
### Définition :

On dit que  $(x_0, y_0)$  est un point critique de  $f$  si  $\nabla f(x_0, y_0) = \vec{0}$ , i.e. si  $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$ .

Le théorème affirme donc que les points où  $f$  admet un extremum sont nécessairement des points critiques de  $f$ .

⚠ La réciproque est fautive ! Avoir un point critique ne suffit pas pour conclure qu'on a un extremum...

La fonction  $f : (x, y) \mapsto xy$  fournit un contre-exemple...



Montrons que  $(0, 0)$  est un point critique mais que  $f$  n'a pas d'extremum local en  $(0, 0)$  :

### Exemples d'études d'extremum :

- $f : (x, y) \mapsto x^3 + y^3$
- $g : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 + xy - 2x - y + 2$

# Plan du cours

<b>1</b>	<b>Ouverts de <math>\mathbb{R}^2</math>, continuité</b>	<b>1</b>
1.a	Définitions . . . . .	1
1.b	Représentation graphique d'une fonction de deux variables, à valeurs réelles . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Dérivées partielles</b>	<b>4</b>
2.a	Définitions, exemples . . . . .	4
2.b	Formule de Taylor à l'ordre 1 . . . . .	6
2.c	Plan tangent . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Composition</b>	<b>8</b>
3.a	Dérivée selon un vecteur . . . . .	8
3.b	Dérivée le long d'un arc paramétré . . . . .	10
3.c	Lignes de niveau et gradient . . . . .	11
3.d	Changement de variables . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Extremas</b>	<b>15</b>