Chapitre 25. Séries numériques.

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Sauf mention contraire, $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ désigne une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$.

1 Définitions et premiers exemples

Pendant l'année, nous avons parfois rencontré des suites (S_n) d'une forme particulière. Par exemple celles-ci, issues du TD 8 sur les suites :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \quad ; \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad ; \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Le $n$ième terme se met sous la forme $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ (ou bien $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$), où (u_k) est une suite fixée.

C'est ce type de suites (S_n) qu'on va appeler "séries".
L'objectif du chapitre est de trouver de nouveaux résultats sur les suites de ce type ; en particulier, il serait intéressant de trouver des informations sur la suite (S_n) à partir de caractéristiques de la suite (u_k) uniquement !

⚠ On a parfois vu des suites dont l'expression fait intervenir le symbole $\sum$ sans que ce soit des séries ! Par exemple $\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$ (TD 8) ou les sommes de Riemann vues au chapitre 22...

1.a Définitions

Définition :

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
La $\boxed{\text{suite}}$ ainsi obtenue, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, est appelée <u>la série de terme général u_k</u>.

Le n-ième terme de cette suite particulière est donc le $\boxed{\text{nombre}}$ $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$, qu'on appelle la <u>somme partielle d'indice n</u>.

Pour désigner la série, c'est-à-dire la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sans avoir à donner un nom S_n pour la somme partielle d'indice n, on a la notation $\boxed{\sum u_k \text{ ou } \sum_{k\geq 0} u_k}$.

Remarque : Si la suite (u_n) n'est définie qu'à partir du rang 1, voire d'un rang n_0, toutes les définitions s'adaptent facilement.

Exemple :

$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}$ désigne la série de terme général $\frac{1}{k}$, c'est-à-dire $\boxed{\text{la suite dont le } n\text{ième terme est } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$.

Définition :

- On dit que la série $\sum u_k$ est <u>convergente</u> (ou <u>converge</u>) si la $\boxed{\text{suite}}$ des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

  Dans ce cas, la limite est notée $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k}$, et ce nombre est appelé <u>somme de la série.</u>

  Reformulons :

  $$\boxed{\begin{array}{l}\text{Dire que } \sum u_k \text{ est convergente, c'est dire que } \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} u_k \text{ existe et est finie.}\\ \text{Seulement dans ce cas là, on peut écrire : } \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} u_k\end{array}}$$

- Si la série n'est pas convergente, on dit qu'elle est <u>divergente</u> (ou qu'elle <u>diverge</u>).

⚠ Le nombre $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ n'est pas toujours défini !
Il faut montrer la convergence de la série avant d'avoir droit de l'écrire. En particulier, si la limite de (S_n) existe mais qu'elle est infinie, on ne peut pas écrire $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = +\infty$.

⚠ Même lorsque la série converge, il faut faire attention aux manipulations du symbole $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}$, dans les égalités, les inégalités... : on n'aura pas toujours les mêmes droits qu'avec une somme finie $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}$, car derrière la notation $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}$ se cache une limite.

Exemple : Dans l'exercice 15 du TD 8, on a en fait montré que $\sum \frac{1}{k}$ était divergente, tandis que $\sum \frac{1}{k^2}$ était convergente. On peut montrer (admis) que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Vocabulaire : $\boxed{\text{Déterminer la nature de la série}}$, c'est déterminer si elle est convergente ou divergente.

Remarque : Lorsqu'une série $\sum u_k$ est <u>convergente</u>, alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ existe et et un nombre fini, et on peut s'intéresser, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, au « complément » qu'il faut ajouter à la somme partielle pour obtenir sa limite $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$; c'est ce qu'on va appeler le <u>reste d'ordre n de la série</u> :

$$R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \; - \; \sum_{k=0}^{n} u_k \; , \quad \text{de sorte que } S_n + R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

On a en fait $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ (i.e. c'est la somme d'une série), et on peut montrer que $R_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
⚠ Ce reste n'existe pas si la série $\sum u_k$ diverge.

1.b Premiers exemples

- Étudions la nature des séries $\sum_{n\geq 0} n$ et $\sum_{n\geq 0}(-1)^n$:

  ✎ **Démonstration** 1

- **Les séries géométriques**

  Proposition :

  Soit $q \in \mathbb{C}$.
  La série $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$
  Dans ce cas, on a :
  $$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

  ✎ **Démonstration** 2

- **Les séries téléscopiques**

  Soit (v_n) une suite de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on sait calculer la $n$ième somme partielle de la série $\sum(v_{n+1} - v_n)$; elle s'exprime à l'aide de la suite (v_n) (et d'une constante), ce qui permet d'étudier facilement sa convergence.

  Exemples : Étudier la nature des séries $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ et $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$; calculer la somme de la série en cas de convergence.

  ✎ **Démonstration** 3

  En pratique, si on constate que la série est téléscopique, on fixe n et on calcule la somme téléscopique finie S_n et on étudie sa convergence. Cela revient à redémontrer la proposition ci-dessus, mais cela permet de calculer la somme de la série en cas de convergence.

- **La série exponentielle**

  Proposition :

  Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge, et $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z}$.

  ✎ **Démonstration** 4

1.c Lien suite-série

À toute suite $(u_k) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, on peut associer une série, qui est une suite (S_n), dont on est capable de calculer les termes connaissant $(u_k) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$:

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Réciproquement, si on connait toutes les sommes partielles S_n d'une série, on peut récupérer le terme général u_n de la série :

$$u_0 = S_0 \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = S_n - S_{n-1}.$$

2 Premières propriétés

2.a Divergence grossière

Proposition :

Si $\sum u_n$ converge alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

✎ **Démonstration** 5

Corollaire :

(Critère de divergence)
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, alors $\sum u_n$ diverge.
On dit alors que la série <u>diverge grossièrement</u> ou qu'elle est <u>grossièrement divergente</u>.

⚠ La réciproque est fausse : il existe des séries divergentes dont le terme général tend vers 0.

En d'autres termes, pour que la série $\sum u_n$ converge, la condition « $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ » est une condition nécessaire mais pas suffisante.

Exemples et contre-exemple :

- $\sum \sqrt{n}$
- $\sum \dfrac{n}{n+1}$
- $\sum (-2)^n$
- La série harmonique $\sum \dfrac{1}{n}$: elle diverge, pourtant, $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

✎ **Démonstration** 6

2.b Opérations : somme et multiplication par un scalaire

Proposition :

- Si λ est un scalaire non nul, alors $\sum \lambda u_n$ est de même nature que $\sum u_n$.

  En cas de convergence, on peut écrire : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors $\sum(u_n + v_n)$ converge, et on peut écrire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

✎ **Démonstration** 7

Remarques importantes :

- Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum(u_n + v_n)$ diverge.

  En effet, si $\sum(u_n + v_n)$ convergeait : en écrivant $v_n = (u_n + v_n) + (-u_n)$, on conclurait que $\sum v_n$ converge puisque $\sum(u_n + v_n)$ et $\sum(-u_n)$ convergent ; contradiction.
- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, alors on ne peut rien dire de $\sum(u_n + v_n)$! !

  Elle peut diverger (par exemple avec $\sum n$ diverge, $\sum n$ diverge, et $\sum 2n$ diverge)

  Elle peut converger (par exemple $\sum n$ diverge, $\sum(-n)$ diverge, mais $\sum(n - n) = \sum 0$ converge)

Récapitulons à l'aide d'un tableau :

	$\sum u_n$ cvg	$\sum u_n$ dvg
$\sum v_n$ cvg		
$\sum v_n$ dvg		

Comme la convergence d'une suite à valeurs complexes équivaut à la convergence de sa partie réelle et de sa partie imaginaire :

Proposition :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

$$\sum u_n \text{ converge } \iff \sum \mathrm{Re}(u_n) \text{ converge et } \sum \mathrm{Im}(u_n) \text{ converge}$$

Dans ce cas, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(u_n) \; + \; i\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(u_n)$,

autrement dit, $\displaystyle\mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(u_n)$ et $\displaystyle\mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(u_n)$.

Exemple : montrer que les séries $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right)}{2^n}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)}{2^n}$ convergent et calculer leurs sommes.

✎ **Démonstration** 8

2.c Influence des premiers termes de la suite

Proposition :

On ne modifie pas la <u>nature</u> (convergente/divergente) d'une série $\sum u_n$ lorsqu'on modifie un nombre fini de termes de la suite (u_n).

⚠ En cas de convergence de la série, la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ est, elle, modifiée a priori !

Intérêt de cette proposition : pour étudier la <u>nature</u> de $\sum u_n$, il suffira d'avoir les hypothèses des théorèmes vraies <u>à partir d'un certain rang.</u>

3 Séries à termes positifs

Dans cette partie, on s'intéresse aux séries $\sum u_n$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.
Pour étudier une série $\sum u_n$ à termes négatifs, il suffira d'étudier $\sum(-u_n)$.

3.a Caractérisation des séries à termes positifs convergentes

Supposons que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0.}$ En notant $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$:

Proposition :

Une série à termes positifs est convergente si et seulement si

3.b Comparaison

Théorème :

(Théorème de majoration / de minoration)
Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, ou bien à partir d'un certain rang :

$$0 \leq u_n \leq v_n$$

Alors :

- $\sum v_n$ converge $\Longrightarrow \sum u_n$ converge
- $\sum u_n$ diverge $\Longrightarrow \sum v_n$ diverge

✎ **Démonstration** 9

Remarque : Supposons les deux séries convergent.

Si l'inégalité $0 \leq u_n \leq v_n$ est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors on peut écrire $0 \leq \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Mais si l'inégalité $0 \leq u_n \leq v_n$ n'est valable qu'à partir de n_0 on n'a que : $0 \leq \displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$.

Théorème :

> Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites $\boxed{\text{positives}}$, et si $\boxed{u_n = o(v_n)}$ ou $\boxed{u_n = O(v_n)}$, alors :
>
> - $\sum v_n$ converge $\Longrightarrow \sum u_n$ converge
> - $\sum u_n$ diverge $\Longrightarrow \sum v_n$ diverge

Théorème :

> (Théorème d'équivalence)
> Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites $\boxed{\text{positives}}$, et si $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n}$.
> Alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature, autrement dit :
>
> $$\sum u_n \text{ converge } \Longleftrightarrow \sum v_n \text{ converge}$$
> $$\sum u_n \text{ diverge } \Longleftrightarrow \sum v_n \text{ diverge}$$

Remarque : pour appliquer ce théorème, il est inutile de vérifier que les deux suites (u_n) et (v_n) sont positives puisque, si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et qu'on sait que (v_n) est positive, alors (u_n) est positive à partir d'un certain rang.

Exemples d'application de ces théorèmes
Déterminer la nature de $\sum u_n$ dans les cas suivants :

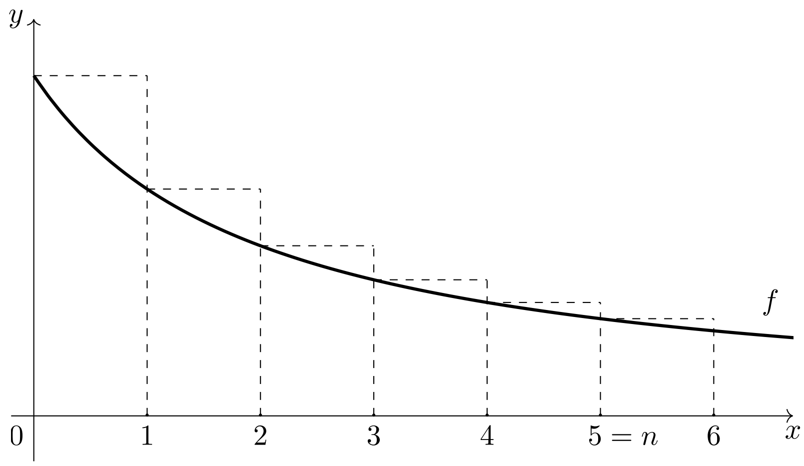
a) $u_n = \dfrac{\ln n}{n2^n}$ b) $u_n = \dfrac{1}{n!}$ c) $u_n = \ln(1 + \frac{1}{n})$ d) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Démonstration 10

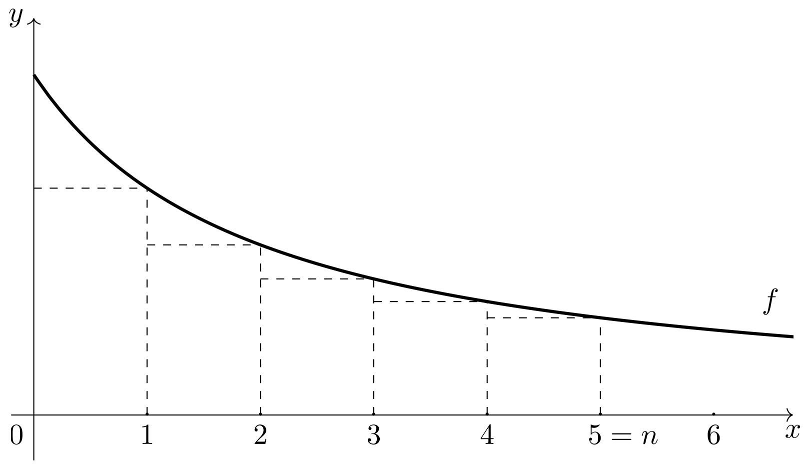
3.c Comparaison série-intégrale

Il arrive parfois que notre série à étudir $\sum u_n$ se mettre sous la forme $\sum f(n)$, où $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ est une fonction $\boxed{\text{positive, continue, décroissante}}$.
Dans ce cas, la convergence de $\sum f(n)$ revient à l'étude de la suite des intégrales $\displaystyle\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$. Si on sait calculer ces intégrales, on sait étudier la série !

C'est lié à un encadrement de $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k)$ qui se conjecture facilement sur un dessin. Pour S_5 :



On conjecture l'inégalité :



On conjecture l'inégalité :

Théorème :

On s'intéresse à la série $\sum f(n)$ où :

$$f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^+ \quad \boxed{\text{positive, continue, décroissante}}$$

Alors :

$$\sum f(n) \text{ converge} \iff \text{la suite } \left(\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}$$

Ce théorème s'adapte pour une fonction qui ne serait définie que sur $[1, +\infty[$ (ou $[2, +\infty[$, ...) : on considère alors $\sum_{n\geq 1} f(n)$ (ou $\sum_{n\geq 2} f(n)$, ...).

Exemple :
Montrer que la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln(n)}$ diverge, et déterminer un équivalent de sa somme partielle d'ordre n.

Démonstration 11

3.d Séries de Riemann

Proposition :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge } \iff \alpha > 1$$

Démonstration 12

En pratique, pour étudier la nature d'une série à termes positifs $\sum u_n$, on cherche souvent à la comparer à une série de Riemann. En particulier :

- Si on trouve qu'à partir d'un certain rang, $\boxed{0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^\alpha}}$ avec $\boxed{\alpha > 1}$: alors $\sum u_n$ converge
- Si on trouve $\boxed{u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)}$ avec $\boxed{\alpha > 1}$: alors $\sum u_n$ converge

  Cela revient à $n^\alpha u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- Pour obtenir que $\sum u_n$ diverge :

  On cherche un $\alpha \leq 1$ tel que $0 \leq \frac{1}{n^\alpha} \leq u_n$, ou $n^\alpha u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (de sorte que $\frac{1}{n^\alpha} = o(u_n)$).

Exemples :

a) Étudier la nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2}$.

b) Étudier la nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\sqrt{n}\ln n}$.

Démonstration 13

4 Absolue convergence

Définition :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe.
On dit que $\sum u_n$ est absolument convergente si $\sum |u_n|$ est convergente.

Théorème :

Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente alors elle est convergente, et on a :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

Exemples :
a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in}}{n^2}$ b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$

Démonstration 14

Remarque : Le théorème se réécrit

$$\sum u_n \text{ absolument convergente } \Longrightarrow \sum u_n \text{ convergente}$$

La réciproque est fausse !
Il y a des séries convergentes qui ne sont pas absolument convergentes.

Exemple : $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$

Démonstration 15

Plan du cours

1 Définitions et premiers exemples 1
- 1.a Définitions 1
- 1.b Premiers exemples 3
- 1.c Lien suite-série 4

2 Premières propriétés 4
- 2.a Divergence grossière 4
- 2.b Opérations : somme et multiplication par un scalaire 5
- 2.c Influence des premiers termes de la suite 6

3 Séries à termes positifs 6
- 3.a Caractérisation des séries à termes positifs convergentes 6
- 3.b Comparaison 6
- 3.c Comparaison série-intégrale 7
- 3.d Séries de Riemann 9

4 Absolue convergence 9