Chapitre 23. Géométrie plane : les outils.

$\mathcal{P}$ désigne le plan euclidien usuel.

1 Rappels et compléments

1.a Colinéarité de deux vecteurs

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont dits colinéaires s'il existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\boxed{\overrightarrow{u} = \lambda.\overrightarrow{v} \text{ ou } \overrightarrow{v} = \lambda.\overrightarrow{u}}$.
C'est équivalent à dire que la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est liée.

1.b Droites affines

Soient A un point de $\mathcal{P}$ et $\overrightarrow{u}$ un vecteur de $\mathcal{P}$ $\boxed{\text{non nul}}$.

- On note $\boxed{A + \overrightarrow{u}}$ le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$.
  On peut alors écrire : $\overrightarrow{u} = B - A$.
- $\boxed{A + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u})}$ désigne l'ensemble de tous les points M de la forme $A + \lambda.\overrightarrow{u}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. C'est donc l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u})$.
  C'est donc $\boxed{\text{la droite } D \text{ passant par } A \text{ et dirigée par } \overrightarrow{u}}$.

  $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u})$ s'appelle alors la direction de D : c'est l'unique droite passant par O et parallèle à D.
  Les vecteurs directeurs de D sont alors les vecteurs non nuls de la direction $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u})$ de D.
  Un vecteur normal à D est un vecteur non nul et orthogonal à un vecteur directeur de D.

1.c Angles dans le plan

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ des vecteurs non nuls.

- Pour dire que θ est une mesure modulo 2π de l'angle orienté de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on note : $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = \theta[2\pi]$.
- La détermination principale est l'unique mesure θ de cet angle orienté se trouvant dans $]-\pi, \pi]$.
  La mesure de l'angle non orienté est alors le réel $\alpha = |\theta|$; il est dans $[0, \pi]$ et on a :
  $$\begin{cases} \cos\alpha = \cos\theta \\ \sin\alpha = |\sin\theta| \text{ , donc } \sin\alpha \geq 0 \end{cases}$$
- Relation de Chasles sur les angles orientés :
  $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}}) = (\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) + (\widehat{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}})[2\pi]$

2 Repérage dans le plan

2.a Repère cartésien

- Une base du plan est un couple $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ de deux vecteurs non colinéaires.
  Pour tout vecteur du plan $\overrightarrow{u}$, il existe alors un unique couple (x, y) de réels tel que $\overrightarrow{u} = x.\overrightarrow{i} + y.\overrightarrow{j}$.
  Le couple de réels (x, y) s'appelle les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$.

- Un repère (cartésien) du plan est formé d'un point O, appelé origine du repère, et d'une base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
  Un tel repère est noté $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
  Pour tout point du plan M, il existe alors un unique couple (x, y) de réels tel que :

  $$\overrightarrow{OM} = x.\overrightarrow{i} + y.\overrightarrow{j} \quad \text{i.e.} \quad M = O + x.\overrightarrow{i} + y.\overrightarrow{j}$$

  Le couple (x, y) s'appelle les coordonnées du point M.

En conséquence, deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont mêmes coordonnées, deux points sont égaux si et seulement si ils ont mêmes coordonnées.
De cette manière, on identifie le plan $\mathcal{P}$ à l'ensemble $\mathbb{R}^2$ des couples de réels (ou à l'ensemble $\mathbb{C}$ des complexes, puisqu'on a identifié $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$!).

En gardant ces notations, la base $\mathcal{B}$ (ou le repère $\mathcal{R}$) peut avoir les caractéristiques suivantes :

- orthogonale :
  si les vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ sont orthogonaux.

- orthonormée (ou orthonormale) :
  si $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ sont orthogonaux,
  et s'ils sont unitaires (on dit aussi normés),
  c'est-à-dire que $||\overrightarrow{i}|| = 1$ et $||\overrightarrow{j}|| = 1$.

- orthonormée directe :
  si $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ sont unitaires et si $(\widehat{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}}) = \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

- De manière plus générale :

  Une base est directe quand la détermination principale de $(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}})$ est dans $]0, \pi[$.

  Une base est indirecte quand la détermination principale de $(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}})$ est dans $]-\pi, 0[$.

Lorsqu'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est fixé, on pourra identifier un point et ses coordonnées, ainsi qu'un vecteur et ses coordonnées ; par exemple $\overrightarrow{i} = (1, 0)$ et $\overrightarrow{j} = (0, 1)$, et $O = (0, 0)$ (ou $O(0, 0)$).
On parle alors de coordonnées cartésiennes.
Si, dans un repère orthonormé, on a le vecteur $\overrightarrow{u} = (x, y)$, et les points $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$:

$$\boxed{||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\boxed{AB = ||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$

2.b Repère polaire

$\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on définit les vecteurs

$$\boxed{\overrightarrow{u}_\theta = \cos\theta.\overrightarrow{i} + \sin\theta.\overrightarrow{j} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v}_\theta = -\sin\theta.\overrightarrow{i} + \cos\theta.\overrightarrow{j}}$$

Ces vecteurs forment une base orthonormée directe.
$(O, \overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{v}_\theta)$ s'appelle le repère polaire.

Définition :

Soit M un point du plan.
On appelle (couple de) coordonnées polaires de M tout couple $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \rho.\overrightarrow{u}_\theta}$$

Cela revient à dire que les coordonnées cartésiennes de M s'écrivent : $\boxed{\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}}$

En particulier, pour $M \neq O$, on peut prendre :
$\rho = ||\overrightarrow{OM}||$ et θ une mesure de l'angle $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM})$.

Exemple : placer les points de coordonnées polaires :
$A(2, \frac{\pi}{3})$; $B(1, \frac{\pi}{4})$; $C(-1, -\frac{\pi}{4})$; $D(-3, \pi)$.

⚠ Contrairement aux coordonnées cartésiennes, on n'a pas unicité des coordonnées polaires !
Plusieurs raisons à cela :

⚠ Même en imposant $\rho > 0$, il n'y a pas de formule simple donnant des coordonnées polaires (ρ, θ) à partir des coordonnées cartésiennes (x, y)...

3 Produit scalaire

Proposition :

(Rappels sur la norme) Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$:

- $||\overrightarrow{u}|| \geq 0$
- $||\overrightarrow{u}|| = 0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$
- $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \quad ||\lambda \overrightarrow{u}|| = |\lambda|\, ||\overrightarrow{u}||$
- $||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}|| \leq ||\overrightarrow{u}|| + ||\overrightarrow{v}||$

3.a Définition

Définition :

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ des vecteurs du plan.
Définissons le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$:

- Si l'un des vecteurs est nul : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$
- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non nuls, en notant θ une mesure de l'angle (orienté ou non) entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$:

$$\boxed{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}||\, ||\overrightarrow{v}||\, \cos\theta}$$

Autres notations : $< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >$, ou $(\overrightarrow{u}|\overrightarrow{v})$ ...
$\boxed{\text{C'est un réel.}}$

Cas particuliers :

- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ colinéaires de même sens, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|$
  Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ col. de sens contraire, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = -\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|$
- En particulier, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2$.
  On a donc $\boxed{\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}}.}$

3.b Propriétés

Proposition :

(Caractérisation de l'orthogonalité)

$$\boxed{\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \iff \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0}$$

Proposition :

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ des vecteurs du plan, et λ un réel.

- Symétrie : $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$
- Bilinéarité :
$$(\lambda.\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w} = \lambda.(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}) + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}$$
$$\overrightarrow{u} \cdot (\lambda.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \lambda.(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$$

Corollaire :

Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ des vecteurs du plan.

- $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 + 2\, \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$
- $\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - 2\, \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$
- $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 + \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 = 2\,(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2)$
- $\|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2 = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})$

Démonstration 1

On peut isoler $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ dans la première ou la deuxième égalité : on obtient alors une formule dite "de polarisation" :

Interprétation en termes de projection

Notons H le projeté orthogonal d'un point M sur la droite passant par un point A et dirigée par $\overrightarrow{u}$ non nul.

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{u}$$

Proposition :

(Expression en coordonnées cartésiennes)

Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormé.

Notons (x, y) et (x', y') les coordonnées respectives des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

$$\boxed{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy'}$$

Remarques :

- On retrouve en particulier que $\|\overrightarrow{u}\|^2 = x^2 + y^2$
- Les coordonnées (x, y) de $\overrightarrow{u}$ peuvent s'obtenir en calculant des produits scalaires :
$$x = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{i} \quad \text{et} \quad y = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{j}$$

4 Produit mixte

4.a Définition et premières propriétés

Définition :

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ des vecteurs du plan.
On définit le produit mixte de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de la manière suivante :

- Si l'un des vecteurs est nul : $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = 0$
- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non nuls, en notant θ une mesure de l'angle orienté entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$:

$$\boxed{[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = ||\overrightarrow{u}||\,||\overrightarrow{v}||\sin\theta}$$

C'est un réel.

Contrairement au produit scalaire, il est indispensable de travailler avec un angle orienté.

Proposition :

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ des vecteurs du plan, et λ un réel.

- Antiymétrie : $[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}] = -[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]$
- Bilinéarité :

$$[\lambda.\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \lambda.[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}] + [\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$$
$$[\overrightarrow{u}, \lambda.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}] = \lambda.[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] + [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}]$$

Proposition :

(Expression en coordonnées cartésiennes)
Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormé direct.
Notons (x, y) et (x', y') les coordonnées respectives des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

$$\boxed{[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'}$$

On reconnaît la définition du déterminant de taille 2.
Plus précisément, $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]$ est le déterminant de la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$:

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = \det_{can}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}).$$

4.b Lien avec la colinéarité et l'orientation

Proposition :

(Colinéarité ou alignement dans le plan)
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ des vecteurs du plan.

$$\boxed{\overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ colinéaires } \iff [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = 0}$$

$$\boxed{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \text{ base du plan } \iff [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] \neq 0}$$

Soient A, B, C des points du plan.

$$A, B, C \text{ alignés} \iff [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = 0$$

Proposition :

(Orientation dans le plan)
Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ une base du plan :

$$\boxed{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \text{ directe } \iff [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] > 0}$$

$$\boxed{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \text{ indirecte } \iff [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] < 0}$$

4.c Interprétation en termes d'aire

Proposition :

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non colinéaires du plan. $\left|[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]\right|$ est égal à l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Démonstration 2

Remarque :
$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]$ est égal à l'aire orientée :

— Si $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base directe alors l'aire est strictement positive.
— Si $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base indirecte alors l'aire est strictement négative.

Corollaire :

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non colinéaires du plan. Alors $\dfrac{1}{2}\left|[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]\right|$ est égal à l'aire du triangle construit sur les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Plan du cours