Chapitre 23. Géométrie plane : droites et cercles.

Dans la suite du cours, on se place dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ de $\mathcal{P}$.

1 Droites du plan

Soit A un point et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul.
On rappelle la définition de la droite passant par le point A et dirigée par $\overrightarrow{u}$: c'est $A + \text{Vect}(\overrightarrow{u})$,
c'est-à-dire l'ensemble des points de la forme $A + \lambda\overrightarrow{u}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$,
c'est-à-dire les points M tels que $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u}$.

1.a Représentations d'une droites

1.a.i Paramétrage

Remarque préliminaire :

Si f et g sont deux fonctions réelles définies sur une partie I de $\mathbb{R}$, la courbe paramétrée par $\boxed{\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, t \in I}$
est l'ensemble $\mathcal{C}$ des points du plan dont les coordonnées peuvent se mettre sous la forme $(f(t), g(t))$ avec un $t \in I$. Ainsi $\mathcal{C} = \{(f(t), g(t)) \ / \ t \in I\}$ et, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\boxed{M(x,y) \in \mathcal{C} \Longleftrightarrow \exists\, t \in I,\ \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}}$$

On parle de paramétrage de la courbe $\mathcal{C}$.

Théorème :

Les droites D du plan sont les ensembles admettant un paramétrage de la forme :

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases},\ t \in \mathbb{R} \quad \text{avec } (\alpha, \beta) \neq (0,0)}$$

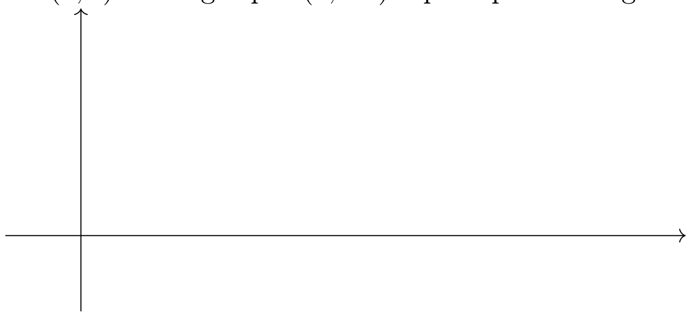
Un point de la droite D est alors $A(x_0, y_0)$, et un vecteur directeur est alors $\overrightarrow{u} = (\alpha, \beta)$.

✎ **Démonstration** 1

Avec les notations ci-dessus et en notant M le point de coordonnées (x, y), le paramétrage signifie exactement $\boxed{M = A + t\overrightarrow{u}}$ en passant aux coordonnées !
C'est donc une simple traduction de la définition : $D = A + \text{Vect}(\overrightarrow{u})$.

Par exemple, la droite passant par le point $(3,2)$ et dirigée par $(4,-1)$ a pour paramétrage :

$$\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 2 - t \end{cases} \quad , \ t \in \mathbb{R}$$



⚠ Il n'y a pas unicité du paramétrage d'une droite ! Ne serait-ce que parce qu'il y a une infinité de choix possibles pour le point (x_0, y_0) et le vecteur directeur (α, β).
Pire, il ne faut pas croire que tous les paramétrages d'une droite D sont nécessairement de cette forme.
Par exemple, voici un autre paramétrage de la droite précédente : $\begin{cases} x = 11 - 3\operatorname{sh} t - e^t + \operatorname{ch} t \\ y = \operatorname{sh} t \end{cases}$ $, t \in \mathbb{R}$.

⚠ Toujours bien préciser le paramètre.
Par exemple, si $E \ : \ \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 2 - t \end{cases} \quad , t \in [0,1]$
alors E n'est pas une droite, c'est

1.a.ii Équation cartésienne

Théorème :

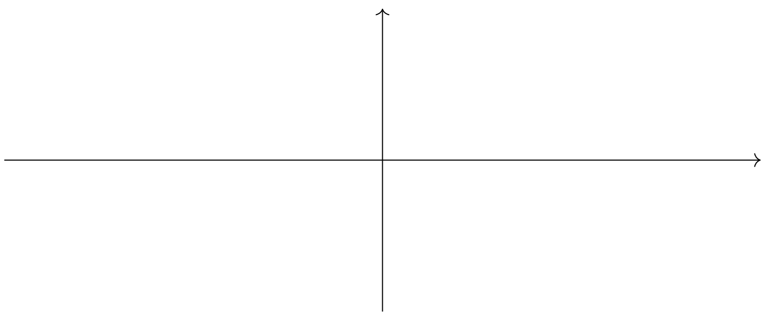
Les droites du plan sont les ensembles admettant une équation cartésienne de la forme :

$$\boxed{ax + by + c = 0 \quad \text{avec } (a,b) \neq (0,0)}$$

Un vecteur normal à la droite est alors $\boxed{\overrightarrow{n} = (a,b)}$
Un vecteur directeur de la droite est alors $\boxed{\overrightarrow{u} = (-b,a)}$

Démonstration 2

Représentons par exemple la droite d'équation $x + 2y + 1 = 0$:



Remarque : Si D et D' ont pour équations respectives $ax + by + c = 0$ et $ax + by + c' = 0$, alors

⚠ Se sortir de la tête que toute droite du plan a une équation de la forme $y = mx + p$: c'est faux ! !
Cela ne donne pas les droites verticales dont une équation est $x = k$.

Précisons : si $D : ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$, alors

- soit $b \neq 0$ et une équation est

- soit $b = 0$ et $a \neq 0$, une équation est

⚠ Une équation cartésienne n'est pas unique ! Ne serait-ce que parce qu'on peut la multiplier par une constante non nulle, voire par une fonction qui ne s'annule jamais ; cela représentera toujours le même ensemble.

1.b Méthodes de base

1.b.i Obtenir un paramétrage d'une droite D

Il suffit, à l'aide de la partie précédente, de déterminer un point et un vecteur directeur de D.
On peut aussi introduire artificiellement un paramètre bien choisi.

Exemple : *passage d'une équation cartésienne à un paramétrage*
Soit $D : -x + 2y + 3 = 0$. Déterminer un paramétrage de D.
✎ **Démonstration** 3

1.b.ii Obtentir une équation cartésienne à partir d'un point et d'un vecteur directeur

Soit D la droite passant par $A(x_0, y_0)$ et dirigée par $\overrightarrow{u} = (\alpha, \beta)$.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et M le point de coordonnées (x, y).
Notre outil pour exprimer la colinéarité de deux vecteurs :

$$\begin{aligned} M \in D &\iff \\ &\iff \\ &\iff \end{aligned}$$

Exemple :
Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par $A(3, 2)$ et dirigée par $\overrightarrow{u} = (4, -1)$.
✎ **Démonstration** 4

Remarque : S'il s'agit du *passage d'un paramétrage à une équation cartésienne*, on peut aussi utiliser la méthode "élimination du paramètre" :
Soit $D : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. Déterminer une équation cartésienne de D.
✎ **Démonstration** 5

Une variante : si on cherche une équation cartésienne d'une droite D donnée par deux points distincts, on se ramène à ce cas en prenant $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$.

1.b.iii Obtentir une équation cartésienne à partir d'un point et d'un vecteur normal

Soit D la droite passant par $A(x_0, y_0)$ et normale à $\overrightarrow{n} = (a, b)$.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et M le point de coordonnées (x, y).
Notre outil pour exprimer l'orthogonalité de deux vecteurs :

$$
\begin{aligned}
M \in D &\Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow
\end{aligned}
$$

Exemple :
Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par $A(3, 2)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n} = (-1, 2)$.

Démonstration 6

1.c Lignes de niveau, régionnement du plan

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ des vecteurs non nuls et A un point du plan.

- Nous avons vu que l'ensemble des points M tels que $[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}] = 0$ est une droite D_0, celle dirigée par $\overrightarrow{u}$ et qui passe par A.
  Plus généralement, pour tout $k \in \mathbb{R}$, $\boxed{\text{l'ensemble } D_k \text{ des points } M \text{ tels que } [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}] = k}$ est une droite également, qui sera parallèle à D_0 i.e. dirigée par $\overrightarrow{u}$.

  En faisant varier k, $\boxed{\text{on obtient toutes les droites dirigées par } \overrightarrow{u}}$.

  (En effet, en développant $\begin{vmatrix} x - x_A & \alpha \\ y - y_A & \beta \end{vmatrix} = k$, les coefficients devant x et y seront les mêmes que dans l'équation de D_0).

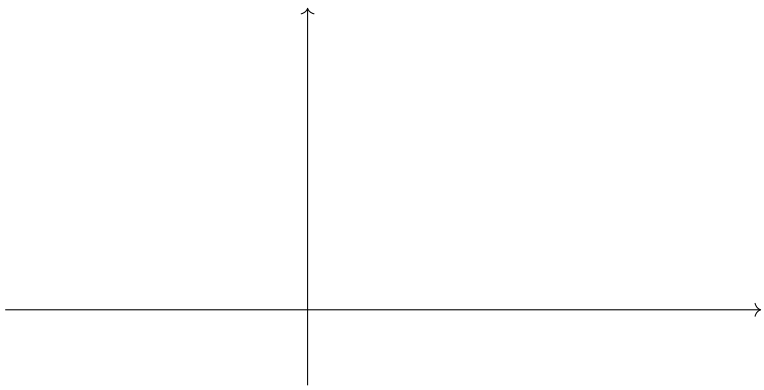
- De même, l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$ est une droite Δ_0, celle normale à $\overrightarrow{n}$ et qui passe par A.
  Plus généralement, pour tout $k \in \mathbb{R}$, $\boxed{\text{l'ensemble } \Delta_k \text{ des points } M \text{ tels que } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = k}$ est une droite également, qui sera parallèle à Δ_0 i.e. normale à $\overrightarrow{n}$.

  En faisant varier k, $\boxed{\text{on obtient toutes les droites normales à } \overrightarrow{n}}$.

Fixons $k \in \mathbb{R}^*$, et notons H le point de la droite $A + \text{Vect}(\overrightarrow{n})$ tel que $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{n} = k$.
Le point H se situe dans l'un des demi-plans délimités par la droite Δ_0 : celui qui contient le vecteur $\overrightarrow{n}$ (tracé à partir de A) si $k > 0$, ou bien l'autre si $k < 0$:

La condition $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = k$ se réécrit $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{n}$, ce qui revient à dire que le projeté orthogonal de M sur la droite $A + \text{Vect}(\overrightarrow{n})$ est H. Le point M se situe alors dans le même demi-plan que H !
Ainsi, les deux demi-plans sont donnés par des inéquations : $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} > 0$ et $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} < 0$.

Traçons par exemple le demi-plan d'inéquation $-x + 2y - 1 \geq 0$:



1.d Exercice de base : détermination d'un projeté orthogonal

Définition :

> Soit D une droite et A un point extérieur à D.
> La droite orthogonale à D et passant par A coupe D en un unique point, appelé projeté orthogonal de A sur D.
> La longueur AH (c'est-à-dire $||\overrightarrow{AH}||$) s'appelle alors la distance de A à D.

Soit D la droite d'équation $x + 2y - 3 = 0$ et A le point de coordonnées $(1, -2)$.
Déterminer les coordonnées de H de deux façons. Quelle est la distance du point A à la droite D ?

Démonstration 7

2 Cercles du plan

Définition :

On appelle <u>cercle</u> de centre Ω et de rayon $R > 0$ l'ensemble :

$$\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{P} \ / \ \Omega M = R\}$$

2.a Équation cartésienne

Notons (x_0, y_0) les coordonnées de Ω. Soit M un point de $\mathcal{P}$, de coordonnées (x, y).

$$M \in D \iff$$

$$\iff$$

$$\iff$$

Remarque : en développant, on obtient une équation de la forme $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$.

⚠ Une équation de la forme $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ ne représente pas toujours un cercle. Cela peut aussi représenter

Pour le savoir, il faut faire apparaître des carrés à l'aide des termes en x^2, x, y^2, y et de constantes.

Exemple : Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 - x + y^2 + 2y = 0$:

2.b Paramétrage

Le cercle trigonométrique (i.e. le cercle de centre O et de rayon 1), a un paramétrage bien connu :

Plus généralement :

Proposition :

Le cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(a,b)$ et de rayon $R>0$ admet pour paramétrage :

Démonstration 8

2.c Problèmes d'intersection

Lorsque c'est possible, pour étudier l'intersection d'un cercle et d'une autre courbe, on injectera un paramétrage de la courbe dans une équation du cercle.
Exemple : Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\Omega(1,1)$ et de rayon 2, et D la droite passant par $A(-2,0)$ et dirigée par $\overrightarrow{u}=(1,1)$. Déterminer l'intersection de $\mathcal{C}$ et D.

Démonstration 9

2.d Cercle de diamètre donné

Proposition :

Soient A et B deux points distincts de E.
L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ est

Démonstration 10

Plan du cours