Chapitre 22. Intégration sur un segment.

1 Fonctions en escalier : définition, intégrale

Dans toute cette partie, on se place sur un segment : a, b désignent des réels tels que $a < b$.

1.a Fonction en escalier

Définition :

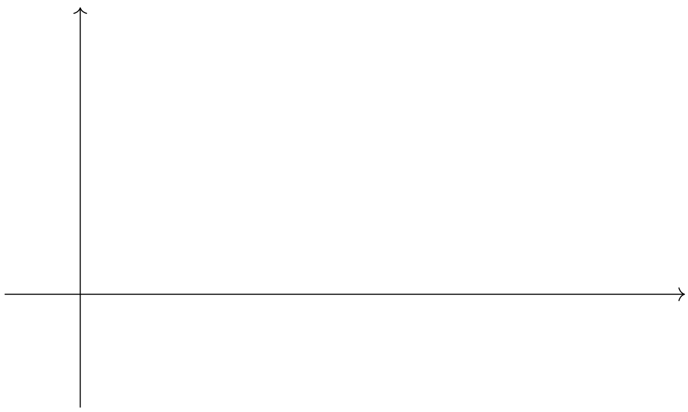
On dit qu'une famille de réels $(x_0, \dots, x_n)$ forme une subdivision du segment $[a, b]$ si :

Définition :

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est une fonction en escalier s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une subdivision $(x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$ tels que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, f soit constante sur $]x_{i-1}, x_i[$:

Ainsi, pour chaque i :

- La valeur de f en x_i est quelconque :
- Il n'est pas obligatoire que x_i soit un point de discontinuité de f



On dit que la subdivision est adaptée à f fonction en escalier si f est constante sur $]x_{i-1}, x_i[$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Il y a plusieurs subdivisions adaptées à f (même une infinité).

On notera dans ce cours $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1.b Intégrale d'une fonction en escalier

Définition :

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier, $(x_0, \dots, x_n)$ une subdivision adaptée f.
Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on note λ_i la valeur de f sur $]x_{i-1}, x_i[$.
On définit alors l'intégrale de f sur $[a,b]$ par :

$$\int_{[a,b]} f =$$

On admet que cette valeur ne dépend pas du choix de la subdivision adaptée à f, ce qui fait que cette définition a un sens. Autres notations : $\displaystyle\int_a^b f$ ou $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$, ou $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$...

Remarques :

- $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ représente donc l'aire algébrique sous la courbe de f (aire du $i$ème rectangle comptée positivement si $\lambda_i \geq 0$, négativement si $\lambda_i < 0$).
-

Cas particulier d'une fonction constante : Si f est cste égale à λ sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f =$

Deux façons de le retrouver :

Proposition :

Soient f, g des fonctions en escalier sur $[a,b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- **Linéarité**

- **Positivité**

- **Croissance**

- **Relation de Chasles**

Démonstration 1

2 Définition et propriétés de l'intégrale pour une fonction continue

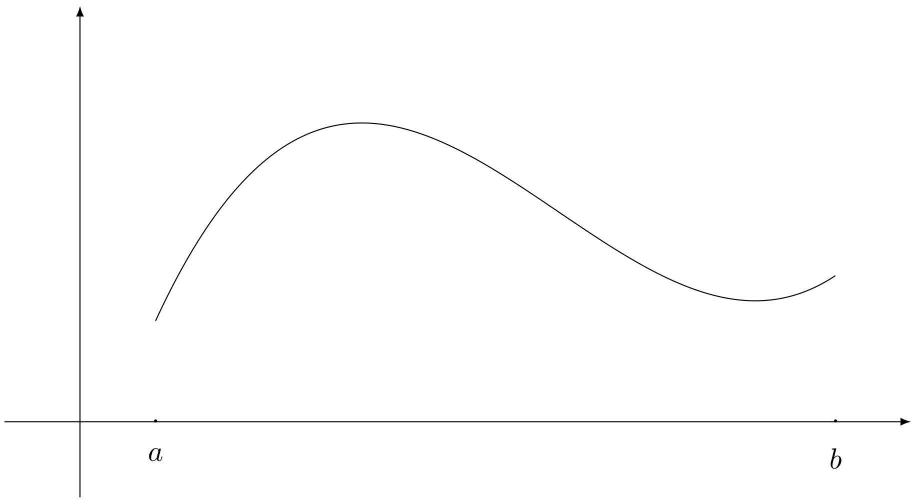
2.a Définition et propriétés de base

Définition :

Soient a, b des réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue.
On considère :

$$I^+ =$$

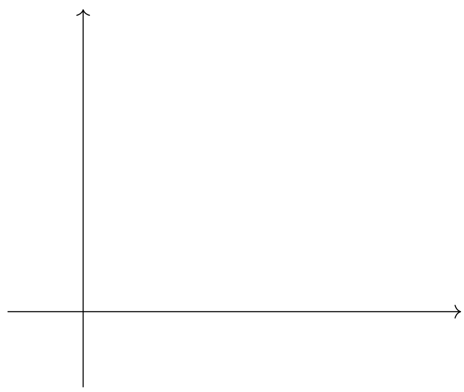
$$I^- =$$



Alors

Cette valeur commune est appelé intégrale de f sur $[a, b]$.
On la note $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ ou $\displaystyle\int_a^b f$ ou $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ (ou $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$...).

Interprétation :



- L'intégrale représente l'aire algébrique sous la courbe.

- Le nombre $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f$ est la

Proposition :

Soient a, b des réels tels que $a < b$, des fonctions continues $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- **Linéarité**

$$\boxed{\int_a^b \lambda f + g \;=\; \lambda \int_a^b f \;+\; \int_a^b g.}$$

(Autrement dit, est une forme linéaire)

- **Positivité**

$$\boxed{\text{Si } f \geq 0 \text{ sur } [a, b] \text{ alors } \int_a^b f \geq 0.}$$

- **Croissance**

$$\boxed{\text{Si } f \leq g \text{ sur } [a, b] \text{ alors } \int_a^b f \leq \int_a^b g.}$$

- **Relation de Chasles**

si c est entre a et b (et encore, c.f. plus bas) : $\boxed{\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.}$

Démonstration 2

Définition de $\int_a^b$ lorsque $a \geq b$

Soit $f : [b, a] \to \mathbb{R}$ continue, où $a \geq b$. On définit :

si $a = b$: $\int_a^b f =$

si $a > b$: $\int_a^b f =$

⚠ Les propriétés de l'intégrales ne s'étendent pas toutes ! En particulier attention aux inégalités ! Cependant la linéarité et la relation de Chasles sont encore valables. Cette dernière s'écrit donc, de façon plus générale :

$$\text{Soit } f : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ continue}, \;\; \forall (x, y, z) \in [a, b]^2, \quad \int_x^y f = \int_x^z f + \int_z^y f.$$

2.b Autres propriétés essentielles

Proposition :

Soient a, b des réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue.

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

Démonstration 3

Théorème :

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ $\boxed{\text{continue}}$. On suppose :

- $f \geq 0$
- f n'est pas identiquement nulle sur $[a, b]$ (c'est-à-dire :)

Alors

$$\int_a^b f > 0.$$

Démonstration 4

Corollaire :

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ $\boxed{\text{continue}}$. On suppose :

- $f \geq 0$
- $\displaystyle\int_a^b f = 0$

Alors

On a le même résultat en remplaçant « $f \geq 0$ » par « $f \leq 0$ ».

⚠ Ce n'est pas vrai si la fonction est en escalier : toujours rappeler que f est continue quand on applique ce théorème ou ce corollaire !!

Contre-exemple :

Exemple d'application :

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \displaystyle\int_0^\pi \sin^n x \,\mathrm{d}x$ est strictement positive.

3 Lien primitive-intégrale

Théorème :

(Théorème fondamendal de l'analyse)
Soit I un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$ continue.
Soit $a \in I$.
F_a : est une primitive de f.

C'est

Autre formulation :

Démonstration 5

Rappelons les différentes conséquences :

Corollaire :

- Si f est continue sur un intervalle I, alors f admet des primitives sur I.
- Si f est continue sur I, a, b des éléments de I, et F une primitive de f sur I,

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Application classique : étude de fonctions de la forme $\boxed{F : x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t}$.

Exemple : On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_x^{\mathrm{sh}(x)} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}}$.
Montrer que F est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer sa dérivée.

Démonstration 6

⚠ Il faut commencer par trouver le domaine de définition de ce type de fonction ; Cela demande parfois du soin !

Exemple : trouver le domaine de définition de $F : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2+x} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Démonstration 7

4 Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose que :

- f est de classe $\boxed{\mathcal{C}^{n+1}}$ sur I
- et qu'il existe un réel M tel que : $\forall t \in I$, $|f^{(n+1)}(t)| \leq M$.

Alors pour tout $a \in I$ et tout $x \in I$,

Autrement dit, pour tout $a \in I$ et tout réel h tel que $a + h \in I$:

Si $0 \in I$, en prenant $a = 0$, on obtient, pour tout $x \in I$:

Bien comprendre l'intérêt par rapport à la formule de Taylor-Young vue au chapitre 21 :
La formule de Taylor-Young est *locale* (elle s'écrit avec des petits o, donc elle parle d'une limite) alors que l'inégalité de Taylor-Lagrange est *globale* : elle est valable sur tout un intervalle.

Cette inégalité est conséquence d'une égalité : la formule de Taylor avec reste intégrale, qui est plus précise mais plus difficile à retenir :
Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur l'intervalle I, alors pour tout $x \in I$ et tout $a \in I$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underbrace{\int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt}_{\text{reste intégral}}$$

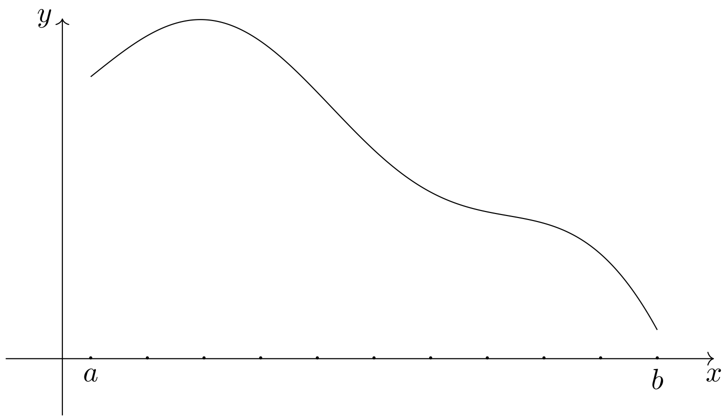
Exemple d'application :
Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.
Montrer que $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} e^x$.

Démonstration 8

5 Sommes de Riemann

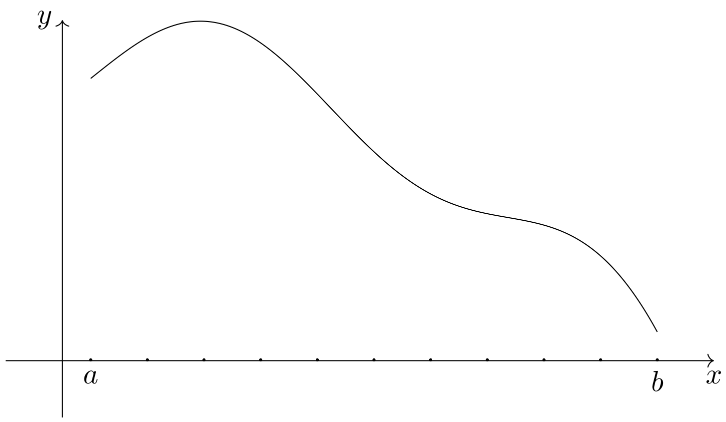
On considère une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ $\boxed{\text{continue}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On souhaite approcher l'aire sous la courbe par n rectangles de largeur constante.
On prend donc une subdivision de $[a, b]$ à pas constant $\dfrac{b-a}{n}$:
$x_0 = a,\ x_1 = a + \dfrac{b-a}{n},\ x_2 = a + 2\dfrac{b-a}{n},\ \ldots\ ,\ x_k = a + k\dfrac{b-a}{n},\ \ldots\ ,\ x_n = a + n\dfrac{b-a}{n} = b$



On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$R_n(f) =$



On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$R'_n(f) =$

Proposition :

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors

$$R_n(f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f \quad \text{et} \quad R'_n(f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f$$

Démonstration 9

Remarque : Souvent, on a $[a, b] = [0, 1]$, ou alors on se ramène à ce cas. Les formules deviennent :

Exemple : On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.
Montrer que (u_n) converge et trouver sa limite.

6 Brève extension au cas des fonctions à valeurs complexes

Rappel : Soit $f : I \to \mathbb{C}$ continue, ce qui signifie que les fonctions réelles $u = \mathrm{Re}(f)$ et $v = \mathrm{Im}(f)$ sont continues sur I.
Pour a, b dans I, on définit l'intégrale de f entre a et b de la façon suivante :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x + i\int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x$$

Autrement dit,

$$\mathrm{Re}\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right) = \int_a^b \mathrm{Re}(f(x))\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right) = \int_a^b \mathrm{Im}(f(x))\,\mathrm{d}x$$

On a encore :
- la linéarité de l'intégrale
- la relation de Chasles
- l'IPP et le changement de variable
- l'inégalité de Taylor-Lagrange
- l'inégalité $\left|\displaystyle\int_a^b f\right| \leq \displaystyle\int_a^b |f|$ reste valable avec $|.|$ désignant le module.

Plan du cours