Chapitre 21. Analyse asymptotique.

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Compléments sur les développements limités

1.a Rappel : définition

Définition :

Soit I un intervalle, $x_0 \in I$, et f une fonction à valeurs dans $\mathbb{K}$ définie sur $D = I$ ou $I\backslash\{x_0\}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 s'il existe $(a_0, \dots a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que :

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} \underbrace{a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n}_{\text{polynôme appelé partie régulière du DL, degré } \leq n} + o\left((x-x_0)^n\right).$$

En particulier, pour $x_0 = 0$, cela signifie :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o\left(x^n\right).$$

1.b Unicité d'un DL et conséquence

Proposition :

Si f admet un DL à l'ordre n en x_0, alors celui-ci est unique ; autrement dit,

$$\begin{array}{rcl} \text{si } f(x) & \underset{x\to x_0}{=} & a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right) \\ \text{et si } f(x) & \underset{x\to x_0}{=} & b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)^2 + \cdots + b_n(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right) \\ \text{alors} & & a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ \dots,\ a_n = b_n. \end{array}$$

Démonstration 1

Proposition :

(DL en 0 et parité)
Si f admet un DL à l'ordre n $\boxed{\text{en } 0}$, et :

- si f est paire, alors tous les coefficients d'ordre impair du DL sont nuls :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_2x^2 + \cdots + a_{2k}x^{2k} + o\left(x^{2k}\right) \text{ ou } o\left(x^{2k+1}\right) \text{ (selon que } n = 2k \text{ ou } 2k+1)$$

- si f est impaire, alors tous les coefficients d'ordre pair du DL sont nuls :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} a_1x + a_3x^3 + \cdots + a_{2k+1}x^{2k+1} + o\left(x^{2k+1}\right) \text{ ou } o\left(x^{2k+2}\right) \text{ (selon que } n = 2k+1 \text{ ou } 2k+2)$$

Démonstration 2

1.c Primitivation de DL

Théorème :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, x_0 un point de I, et $n \in \mathbb{N}$.
On note F une primitive de f sur I.
Si f admet un DL à l'ordre n en x_0 :

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^n\right)$$

alors F a un DL à l'ordre $n+1$ en x_0, qui est :

✎ **Démonstration** 3

Dans le cas courant $x_0 = 0$:

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) \Longrightarrow$$

Exemples d'utilisation : à partir d'autres DL connus....
- Déterminer le DL en 0 de $\ln(1+x)$ (à l'ordre n) et celui de Arctan (à l'ordre $2n+1$).
- Déterminer le DL à l'ordre 5 en 0 de Arccos.

✎ **Démonstration** 4

⚠ Il n'y a pas de résultat pour la dérivée concernant l'existence de DL.
Plus précisément :
si f a un DL à l'ordre n en x_0, on ne peut pas conclure que f' a un DL à l'ordre $n-1$ en x_0...

(Cependant, si on sait d'autre part que f' a bien un DL à l'ordre $n-1$ en x_0, alors il s'obtient bien sûr en dérivant terme à terme celui de f, par application du résultat sur l'intégration de DL à f' !
Mais en pratique, cela ne sert pas vraiment.)

2 DL et classe $\mathcal{C}^n$ - Formule de Taylor-Young

2.a Introduction

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, x_0 un point de I, et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f.

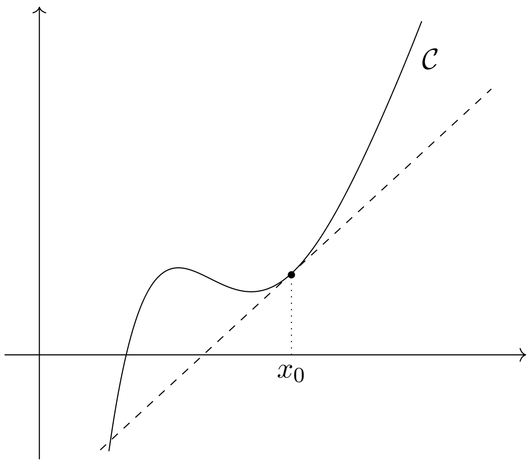
- On sait que f est continue en x_0 si et seulement si f admet en x_0 un DL d'ordre 0, qui sera nécessairement :

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} \underbrace{f(x_0)}_{\text{polynôme de degré 0}} + o(1)$$

- On sait que f est dérivable en x_0 si et seulement si f admet en x_0 un DL d'ordre 1, qui sera nécessairement :

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{\text{polynôme de degré 1}} + o(x-x_0)$$

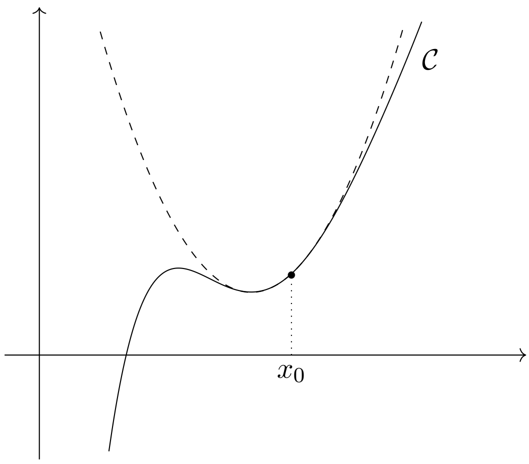
Graphiquement, $\mathcal{C}$ est localement proche de sa tangente au point x_0 :



- Dans ce chapitre :
On verra que si f est de classe $\mathcal{C}^2$, alors f admet en tout $x_0 \in I$ un DL à l'ordre 2, qui sera nécessairement :

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2}_{\text{polynôme de degré 2}} + o\left((x-x_0)^2\right)$$

⚠ Il n'y a plus de "si et seulement si"...
Graphiquement, la courbe $\mathcal{C}$ est localement proche d'une certaine parabole.



Plus généralement, si f est de classe $\mathcal{C}^n$, alors f admet en tout $x_0 \in I$ un DL à l'ordre n...

2.b Formule de Taylor-Young

Théorème :

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction de classe , avec I un intervalle. Soit $x_0 \in I$. Alors f admet un DL à l'ordre n en x_0, qui est :

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=}$$

$$\underset{x\to x_0}{=}$$

si $x_0 = 0$: $f(x) \underset{x\to 0}{=}$

$$\underset{x\to 0}{=}$$

Démonstration 5

Pour résumer les liens entre DL d'ordre n et classe $\mathcal{C}^n$:

continuité		existence d'un DL à l'ordre 0
dérivabilité		existence d'un DL à l'ordre 1
classe $\mathcal{C}^n$		existence d'un DL à l'ordre n

Mais la réciproque du dernier point est fausse pour $n \geq 2$!
En particulier, existence d'un DL d'ordre 2 en $x_0 \not\Rightarrow f$ deux fois dérivable en x_0.

2.c Application de Taylor-Young : preuves de DL usuels

Exemples : exp, cos, $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$.

Démonstration 6

On se servira de la formule de Taylor-Young pour les exercices théoriques principalement ; pour les calculs pratiques de DL, on utilise en général les opérations vues : $+$, $\times$, $/$, $\circ$, primitivation.

2.d Application des DL ou des développements asymptotiques à connaître

- Étude locale (prolongement, dérivabilité, position par rapport à la tangente...) d'une fonction en un point : c.f. ch 12.
- Calcul de limite : si f a un DL en x_0, la limite de f en x_0 est le terme constant a_0 ;
  si f a un développement asymptotique, on considère le premier terme du développement. [1]
- Détermination d'asymptote et position par rapport à l'asymptote : c.f. ch 9.
- Recherche d'équivalent (c.f. après !) : l'équivalent sera le premier terme non nul... [2]

1. On suppose les termes classés du "moins négligeable" au "plus négligeable".
2. On suppose les termes classés du "moins négligeable" au "plus négligeable".

3 Domination

3.a Pour les suites

Définition :

Soient u et v deux suites de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
On suppose que $v_n \neq 0$, au moins à partir d'un certain rang.
On dit que u est <u>dominée</u> par v , et on note $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)}$ si la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée.

Autres notations : $u_n = O_{n\to+\infty}(v_n)$, $u_n = O(v_n)$.

Voici une définition équivalente, qui permet d'éviter de supposer que v_n ne s'annule jamais à partir d'un certain rang : $u_n = O(v_n) \iff \exists\,(M_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = M_n v_n$ et (M_n) est bornée.

Exemples : $5n^2 + \ln n$

$\dfrac{\sin(n)}{n}$

$\dfrac{(-1)^n}{\ln(n)} + \dfrac{1}{n^2}$

Comme une suite convergente (vers 0) est bornée :

Proposition :

$$u_n = o(v_n) \implies u_n = O(v_n)$$

⚠ la réciproque est fausse !

Cette notion de O est celle qu'on utilise en informatique pour parler de complexité.

Propriétés de O à connaître : les mêmes que pour o pour la multiplication par un scalaire, la somme, le produit, la transitivité ; et :

$$\boxed{u_n = O(1) \iff (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}}$$

⚠ Si vous trouvez $u_n = O(0)$, cela signifie que la suite (u_n) est nulle à partir d'un certain rang : il y a de fortes chances que vous vous soyez trompé !

3.b Pour les fonctions

La différence : pour les suites, n ne peut tendre que vers $+\infty$, alors qu'ici on se place en un point a qui peut être fini ou $\pm\infty$.

Définition :

Soient f, g, des fonctions définies sur un intervalle I, et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ un point ou une extrémité de I.
On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a.
On dit que <u>f est dominée par g au voisinage de a</u> si $x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est bornée au voisinage de a.
Notations : $f = O_a(g)$, ou $f(x) = O_{x\to a}(g(x))$, ou $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$.

Voici une définition équivalente, qui englobe le cas où g s'annule au voisinage de a :

$f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x)) \iff$ il existe une fonction M telle que $f(x) = M(x)g(x)$ et M bornée au voisinage de a

Les propriétés sont les mêmes que pour les suites (lien entre o et O, opérations, $O(o)$...), précisons quand même :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to a}{=} O(1) \iff f \text{ est bornée au voisinage de } a}$$

4 Equivalence

4.a Pour les suites

4.a.i Définition et premiers exemples

Définition :

Soient u et v deux suites de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
On suppose que $v_n \neq 0$, au moins à partir d'un certain rang.
On dit que u est <u>équivalent</u> à v , et on note $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n}$ si :

Autre notation : $u_n \sim v_n$.

Voici une définition équivalente, qui permet d'éviter de supposer que v_n ne s'annule jamais à partir d'un certain rang :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff \exists\, (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a_n v_n \ \text{ et } \ a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

En conséquence, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 0$ signifie :

Cela n'arrive quasiment jamais en pratique !

Premiers exemples :

$n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim}$

$3n^2 + 2n - \sqrt{n} + \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim}$

$3n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim}$

$\dfrac{1}{n+\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim}$

$\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim}$

$\dfrac{2}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim}$

4.a.ii Propriétés de base

Proposition :

- $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$ (réflexivité)

  Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$ (symétrie)

  Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et si $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$ (transitivité)
- Multiplication par un scalaire :
  Pour $\lambda \neq 0$, si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $\lambda u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda v_n$.
- Produit :
  Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} t_n$, alors $u_n w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n t_n$
- Valeur absolue/module :
  Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |v_n|$
- Puissances :
  Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, et si $(u_n)_n$ est strictement positive à partir d'un certain rang, alors v_n aussi et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $u_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^\alpha$.
- Inverse :
  Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, et si $(u_n)_n$ est non nulle à partir d'un certain rang, alors v_n aussi et
  $\dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{v_n}$

✎ **Démonstration** 7

⚠ Il n'y a pas de propriété pour les sommes !
Contre-exemple :

En fait, on n'est pas obligé de supposer $(u_n)_n$ positive à partir d'un certain rang pour les puissances si ces puissances sont entières : en effet, cela revient à utiliser la propriété sur les produits.

⚠ Pas de composition avec les équivalents ! :
Contre-exemple :

4.a.iii Lien entre $\sim$ et o (développements limités en particulier)

Une propriété déjà vue au chapitre 9 :

Proposition :

> Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et si $w_n = o(u_n)$ alors $w_n = o(v_n)$.

Utilisation : on peut donc écrire qu'un $o\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$ est un .

La proposition fondamentale, également vue au chapitre 9 :

Proposition :

> $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff u_n = v_n + o(v_n)$.

Exemple : $u_n = \ln n + n^2 + 2^n \underset{n\to+\infty}{\sim}$

D'où une méthode pour calculer l'équivalent d'une somme :
passer par les o, souvent avec des développements limités/asymptotiques, que l'on sait sommer.

Exemple : Déterminer un équivalent simple de la suite de terme général : $u_n = n^{\frac{1}{n}} - \sqrt{1 + \frac{\ln(n)}{n}}$

Démonstration 8

On obtient un équivalent en prenant le premier terme non nul dans le développement trouvé.

Remarque : Soit (u_n) une suite.
Que signifie $u_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$? Que signifie $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 + \dfrac{1}{n}$?
Quelle est l'information la plus intéressante ?

Démonstration 9

Au final, s'il reste des sommes dans un équivalent (par exemple $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 3n^2 + 2n$), c'est qu'on n'a pas encore l'équivalent le plus simple de la suite (u_n) ; dans l'exemple, le terme $2n$ est superflu, il n'apporte aucune information. On ne retiendra que

4.a.iv Equivalent et signe, équivalent et limite

Une propriété démontrée au chapitre 9 :

Proposition :

> On suppose $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.
> Si la suite $(u_n)_n$ est positive à partir d'un certain rang, alors $(v_n)_n$ aussi.
> Si la suite $(u_n)_n$ est non nulle à partir d'un certain rang, alors $(v_n)_n$ aussi.

Même chose avec "négative", ou "strictement positive", ou "strictement négative".

Proposition :

Soit $\boxed{\ell \text{ fini non nul}}$. $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \iff u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell$.

⚠ Ce n'est pas valable si $\ell = 0$: se rappeler que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 0$ est rarissime...

De même que pour le signe, une information $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ avec (v_n) suite "plus simple" dont on connaît la limite permet d'obtenir des informations sur la suite de départ (u_n) :

Proposition :

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et que $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ (fini ou infini), alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

(c.f. chapitre 9)

Ceci nous donner une nouvelle méthode pour calculer la limite d'une suite : trouver un équivalent simple .

⚠ Attention aux déformations de cette proposition :

— Si (u_n) et (v_n) ont la même limite, on ne peut pas conclure que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.
  Contre-exemple :

— Si (u_n) a une limite, alors (u_{n+1}) a la même limite ; mais même dans ce cas particulier, on ne peut pas conclure que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_{n+1}$.
  Contre-exemple :

Proposition :

Si à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$, et s'il existe une suite (a_n) non nulle à partir d'un certain rang telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n$ et $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n$, alors

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n$$

✎ **Démonstration** 10

4.a.v Exemples à connaître

Proposition :

Si $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$:

✎ **Démonstration** 11

Exemples :

$u_n = \sin \frac{1}{n}$

$v_n = \mathrm{sh}\, \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

et $u_n + v_n$?

Autres exemples d'application :

a) Équivalent simple de $u_n = \ln\left(1 + \sin \frac{1}{n}\right)$ b) Limite de $u_n = \left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^n$

Démonstration 12

Proposition :

(Polynômes)

Pour $a_0,\ \ldots, a_p$ dans $\mathbb{K}$ avec $\boxed{a_p \neq 0}$,

$$a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \cdots + a_p n^p \underset{n\to+\infty}{\sim} a_p n^p$$

4.b Pour les fonctions

La définition et les propriétés sont similaires ; une différence est bien sûr que, pour les suites, n ne peut tendre que vers $+\infty$, alors qu'ici on se place en un point a qui peut être fini ou $\pm\infty$.

Il y aura un résultat supplémentaire concernant la "composition".

Dans la suite, sauf mention contraire, on considerera des fonctions (f, g, h...) définies sur un intervalle I, et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ un point ou une extrémité de I.

Définition :

On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a.

On dit que f est équivalente à g au voisinage de a si :

Notations : $f \underset{a}{\sim} g$ ou $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.

Une définition qui marche aussi dans le cas où g s'annule au voisinage de a :

$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \iff$ il existe une fonction u telle que $f(x) = u(x)g(x)$ au voisinage de a et $u(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$

⚠ En conséquence, $f(x) \underset{x\to a}{\sim} 0$ signifie que f est nulle au voisinage de a (rarissime ! ! ! vérifier ses calculs dans ce cas...).

Résumons les propriétés similaires à celles des suites :

Proposition :

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \iff$$

En conséquence, si on connaît un développement limité ou asymptotique de f au voisinage de a, en considérant que les termes sont bien ordonnés, $\boxed{\text{L'équivalent est le premier terme non nul du développement.}}$

Exemples :

Il faut savoir traiter les polynômes ; par exemple, pour $-4x^3 - 2x^2 + 1$:

Un équivalent en $+\infty$ est

Un équivalent en 0 est

Un équivalent de $-4x^3 - 2x^2 + 1 + \dfrac{7}{\sqrt{x}}$ en 0 est

Proposition :

(Équivalents usuels)

- $\exp(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$
- $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
- $\forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ (1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$
- En particulier $\sqrt{1+x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{2}x$
- $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
- $\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
- $1 - \cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{2}x^2$
- $\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
- $\mathrm{ch}(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{2}x^2$
- $\mathrm{Arcsin}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
- $\mathrm{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$

Proposition :

- Soit $\boxed{\ \ell \text{ fini non nul}\ }$. $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \iff f(x) \underset{x\to a}{\sim} \ell$
- Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et...
  si g est > 0 au voisinage de a (resp. < 0, resp. non nulle) alors g aussi.
  si $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ aussi.
- Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ au voisinage de a, et si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} \varphi(x)$ et $h(x) \underset{x\to a}{\sim} \varphi(x)$, alors $g(x) \underset{x\to a}{\sim} \varphi(x)$.

Proposition :

- $\sim$ réflexive, symétrique et transitive.
- On peut multiplier les deux membres d'un équivalent par un λ non nul
- On peut faire des produits, des quotients membre à membre des équivalents ;
- On peut les passer à la valeur absolue ;
- On peut les passer à une puissance $\alpha \in \mathbb{R}$ fixée si les fonctions sont bien strictement positives au voisinage du point.

⚠ On ne peut pas, de manière générale, faire de sommes ou de compositions d'équivalents.
Des contre-exemples :
On sait que $x + \sqrt{x} + \ln(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x$ et $-x + \ln(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} -x$. Mais on ne peut pas sommer :

On sait que $x^2 + x \underset{x \to +\infty}{\sim} x$. Mais on ne peut pas composer par exp :

Comment faire alors pour trouver l'équivalent d'une somme ou d'une composition ?

— passer par les o : montrer plutôt que $f(x) \underset{x \to a}{=} g(x) + o\left(g(x)\right)$

— ou revenir à la définition : montrer que $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tend vers 1 quand x tend vers a.

Exemples :
a) Trouver un équivalent de $x + \tan x$ en 0.
b) Trouver un équivalent de $\exp(-x^2 + \frac{1}{x})$ en $+\infty$.

✎ **Démonstration** 13

La seule "composition" qui est autorisée, c'est une limite avec un équivalent :

Proposition :

Si $f(X) \underset{X \to b}{\sim} g(X)$ et si $\varphi(t) \underset{t \to a}{\longrightarrow} b$, alors $f\left(\varphi(t)\right) \underset{t \to a}{\sim} g\left(\varphi(t)\right)$.

✎ **Démonstration** 14

Exemple : déterminer un équivalent simple en 0 de $\exp\left(\sin t\right) - 1$.

✎ **Démonstration** 15

Remarque : On peut montrer qu'on a le DL suivant : $\text{Arcsin}(x) \underset{x \to 0}{=} x + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$.

- Quelle différence avec l'affirmation "$\text{Arcsin}(x) \underset{x \to 0}{\sim} x + \dfrac{x^3}{6}$" ?

- Quels équivalents intéressants déduire de ce DL ?

Entraînement : Donner des équivalents simples de :

a) $f(x) = \ln(1+x)$ en $+\infty$

b) $f(x) = \sin(5x) + \sin(x)$ en 0

c) $f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}$ en $+\infty$

Démonstration 16

4.c Application : calcul de limites

Désormais, quand c'est possible, on évite de faire des développements limités pour calculer des limites : souvent, les équivalents suffisent et constituent un outil plus rapide.
On essaiera de factoriser les expressions, et de trouver un équivalent de chaque terme ; parfois on fera un DL pour un terme, mais on repassera aux équivalents dès que cela sera possible.

Exemples :

- Déterminer la limite en 0 de $f(x) = \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}$.
- Déterminer la limite en 1 de $g(x) = \dfrac{\ln^2(2-x)}{x^2 - 2x + 1}$.
- Déterminer la limite de $u_n = \left(\dfrac{1}{n} + 2 - n\right) \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{n}$.

Démonstration 17

4.d Conséquence : liens entre DL et extremum

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et a un point de I qui ne soit pas une extrémité de I.
On suppose f dérivable en a.

- (Condition nécessaire d'extremum) Nous avons vu au chapitre 12 que si f admet en a un extremum local alors $f'(a) = 0$, ce qui revient à dire que le DL d'ordre 1 en a de f est

- (Condition suffisante d'extremum) Si f admet un DL d'ordre 2 en a de la forme

$$f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + C(x-a)^2 + o\left((x-a)^2\right) \qquad \boxed{\text{avec } C \neq 0}$$

  alors f admet un extremum en a : un maximum si $C > 0$, un minimum si $C < 0$.
  En effet :

Plan du cours