Chapitre 19. Espaces probabilisés finis, variables aléatoires.

1 Expériences aléatoires, événements, variables aléatoires

1.a Expérience aléatoire, univers

On parle d'expérience aléatoire lorsqu'il y a plusieurs issues possibles à l'expérience, et qu'on ne peut pas prédire quelle issue on va obtenir.
Par exemple, lorsqu'on lance un dé non pipé à 6 faces, il s'agit d'une expérience aléatoire ; une telle expérience est certes soumise aux lois de la physique, et son résultat est déterminé par des paramètres initiaux, mais ils sont trop nombreux pour qu'on puisse espérer prévoir ce résultat.
Les probabilités forment une branche des mathématiques dont le but est de modéliser de tels phénomènes aléatoires pour pallier à l'insuffisance des méthodes déterministes.

Définition :

> On considère une expérience aléatoire donnée.
> On appelle univers l'ensemble de toutes les issues possibles.

L'univers est souvent noté Ω, et pour une issue on utilise souvent ω.
Exemples :

- L'univers pour le lancer de dé est
- On effectue, avec une pièce de monnaie, n pile ou face successifs.
- On choisit une "main" de 5 cartes dans un jeu de 32 cartes. L'univers est
- L'attente à la cantine est une expérience aléatoire. On peut prendre comme univers :
- On tire une fléchette sur une cible circulaire de rayon R.
- *Parfois, ce n'est pas simple....* On jette 2 dés simultanément. Si la somme vaut 5, on s'arrête. Sinon, on recommence, et ainsi de suite.
  Des issues possibles : $((1,2),(4,2),(2,3))$, ou encore $((1,4))$, ou encore la suite infinie $((1,1),(1,1),(1,1),\ldots)$.
  On définit l'univers Ω comme une réunion de sous-ensembles, obtenus en classant les issues selon rang k auquel on s'arrête :
  $$\Omega = \Omega_\infty \cup \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \Omega_k\right) \text{ où } \Omega_k = \Big\{\big((a_1,b_1),\ldots,(a_k,b_k)\big) \ / \ a_k+b_k = 5 \text{ et } \forall\, i \in \{1,\ldots,k-1\},\ a_i+b_i \neq 5\Big\}$$
  $$\text{et } \Omega_\infty = \Big\{\big((a_i,b_i)\big)_{i\in\mathbb{N}^*} \ / \ \forall\, i\in\mathbb{N}^*,\ a_i+b_i\neq 5\Big\}$$

Cette année, on n'étudie que le cas des univers finis.

1.b Événements, opérations, incompatibilité

Lors de l'expérience aléatoire, certaines choses peuvent se produire ou non, certaines propriétés peuvent être vérifiées ou non.
Par exemple, pour un lancer de dé, on peut considérer la propriété « le résultat est pair ».
Cela revient à considérer $\boxed{\text{l'ensemble des issues pour lesquels la propriété est réalisée}}$: on parle alors d'événement.

Définition :

> Un événement est une partie de l'univers Ω.
>
> ⚠ *Définition valable uniquement pour les univers finis !*

Exemple : Pour le lancer de dé, l'événement « le résultat est pair » est

Vocabulaire :

- Soit $\omega \in \Omega$ une issue de l'expérience et A un événement. On dit que A est réalisé si $\omega \in A$.
- Soit $\omega \in \Omega$, $\{\omega\}$ s'appelle un événement élémentaire.
- Ω est appelé événement certain ; $\emptyset$ est appelé événement impossible.

Événements et opérations ensemblistes :
Pour A et B des événements :

- « non A » est l'événement qui est réalisé si et seulement si A n'est pas réalisé.
  C'est donc
- « A et B » est l'événement qui est réalisé si et seulement si à la fois A et B sont réalisés.
  C'est donc
- « A ou B » est l'événement qui est réalisé si et seulement si A est réalisé ou B est réalisé.
  C'est donc
- On dit que A implique B si la réalisation de A implique la réalisation de B.
  C'est équivalent à :
  Par exemple, pour l'expérience du lancer de dé, l'événement « Le résultat est 2 ou 4 » implique l'événement « Le résultat est pair »

Exemple
Soit $n \geq 2$. On lance n fois une pièce.
Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on note F_k l'événement : « au k-ème lancer, on a obtenu face ».
Exprimer les événements suivants à l'aide des F_k :

- A : « On obtient face au moins une fois au cours des n lancers »

$$A =$$

- B : « On n'obtient jamais face au cours des n lancers »

$$B =$$

- C : « On obtient (au moins) deux faces consécutifs au cours des n lancers »

$$C =$$

Définition :

- Lorsque $A \cap B = \emptyset$, on dit que les événements A et B sont incompatibles : ils ne peuvent pas se réaliser en même temps.
- Soient $A_1, \ldots, A_n$ des événements, on dit qu'il sont deux à deux incompatibles si

Remarque : Attention à ne pas déformer la définition. Exemple : on lance deux fois de suite un dé.
On définit les événements :
A : « On obtient au moins un 1 »
B : « On obtient au moins un 2 »
C : « On obtient au moins un 3 ».
Que dire en termes d'incompatibilité ?

Définition :

Soit Ω un ensemble fini.
On appelle système complet d'événements toute famille finie $\{A_1, \ldots, A_n\}$ d'événements deux à deux incompatibles, dont la réunion est Ω :

Exemples :

- Si A est un événement, on a toujours :
-
- On tire un mot au hasard dans le dictionnaire. On définit les événements :
  C_a : « Le mot commence par un a » ;
  C_b : « Le mot commence par un b » ;
  $\vdots$
  C_z : « Le mot commence par un z ».
  $(C_a, C_b, \ldots, C_z)$ est un système complet d'événements.

1.c Variables aléatoires, événements associés

1.c.i Définition d'une variable aléatoire

Souvent, lors d'une expérience aléatoire, on s'intéresse à une grandeur dont la valeur dépend de l'issue de l'expérience. Par exemple, si on lance 5 fois une pièce et qu'on s'intéresse à l'événement « On a obtenu 3 piles », le plus pratique peut être de définir la variable aléatoire X égale au nombre total de piles obtenus au cours des n lancers. L'événement qui nous intéresse pourra alors s'écrire « $X = 3$ ».
X n'est pas une constante, sa valeur change selon l'issue ω considérée :

C'est donc une fonction, définie sur l'ensemble Ω des issues !

Définition :

Soit Ω un univers fini et E un ensemble.
Une application X définie sur Ω à valeurs dans E s'appelle une variable aléatoire.
Lorsque $E = \mathbb{R}$ ou $E \subset \mathbb{R}$, on dit que X est une variable aléatoire réelle.

⚠ *Définition valable uniquement pour les univers finis !*

Puisque Ω est fini, l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X est nécessairement fini. On l'écrit souvent sous la forme $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ où les x_i sont supposés deux à deux distincts.

Exemple : On lance deux dés et on note X la somme des résultats obtenus. $X(\Omega) =$

Définition :

Soit Ω un univers fini et A un événement (autrement dit, une partie de Ω).
La fonction indicatrice de A est :

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{1}_A : & \Omega & \to & \{0,1\} \\ & \omega & \mapsto & \begin{cases} 1 \text{ si } \omega \in A \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{array}$$

C'est une variable aléatoire sur Ω, qui donne 1 si A est réalisé et 0 sinon.

Exemple : Si on joue à un jeu où l'on gagne 3 euros en cas de succès et où on ne perd rien en cas d'échec, la variable aléatoire du gain est .
Si de plus on perd 4 euros en cas d'échec, le gain net est

1.c.ii Événements associés à une variable aléatoire

Reprenons le premier exemple de 5 pile-ou-face : on note X le nombre total de piles obtenus.
L'événement « On obtient un nombre pair de piles » se notera $(X \in B)$ avec $B = \{0, 2, 4\}$;
c'est $\{\omega \in \Omega \,/ X(\omega) \in B\}$. On reconnaît
L'événement « On obtient 3 piles » se notera $(X = 3)$; c'est $\{\omega \in \Omega \,/ X(\omega) = 3\}$.
On reconnaît

De manière générale :
Définition :

Soit X une variable aléatoire sur un univers fini Ω, à valeurs dans E.
Pour toute partie B de E, on note :

$$(X \in B) = X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) \in B\}$$

Il s'agit d'un événement (partie de Ω). On note aussi $\{X \in B\}$.

On définit aussi, pour tout $x \in E$, $(X = x) = X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) = x\}$

et, si $E \subset \mathbb{R}$, $(X \geq x) = X^{-1}([x, +\infty[) = \{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) \geq x\}$.

On définit de façon similaire $(X > x)$, $(X \leq x)$, $(X < x)$.

Exemple : On lance n fois une pièce, avec $n \geq 2$.
Si on n'obtient jamais pile, on pose $X = n + 1$. Sinon, on note X le rang d'obtention du premier pile.
On a alors : $X(\Omega) =$
« On obtient pile au moins une fois » est

« On fait pile au premier lancer » est

« On obtient face aux deux premiers lancers » est

1.c.iii Système complet d'événements associé à une variable aléatoire

Proposition-définition :

> Soit X une variable aléatoire sur un univers fini Ω.
> Notons $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ avec les x_i 2 à 2 distincts.
> Alors $(X = x_1),\ (X = x_2),\ \ldots, (X = x_n)$ forment un système complet d'événements, appelé <u>système complet d'événements associé à X</u>

Illustration :

Pour toute partie B de $X(\Omega)$, l'événement $(X \in B)$ peut s'obtenir à partir de ces "événements élémentaires associés à X" :

$$(X \in B) =$$

Inversement, si $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$, on peut ordonner ses éléments : $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, avec $n \geq 2$. Il est alors intéressant de savoir retrouver les événements $(X = x_i)$ à partir des $(X \geq x_i)$:

Sauriez-vous faire de même à partir des $(X \leq x_i)$?

1.c.iv Couples de variables aléatoires, système complet associé

Lorsqu'on dispose de deux variables aléatoires $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to E'$, on peut s'intéresser au couple (X, Y) de variables aléatoires. C'est en fait une variable aléatoire, mais à valeurs dans $E \times E'$:

$$\begin{array}{rccl} (X, Y) : & \Omega & \to & E \times E' \\ & \omega & \mapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array}$$

Proposition-définition :

Les événements de la forme $(X = x) \cap (Y = y)$, avec $x \in X(\Omega)$, $y \in Y(\Omega)$, forment un système complet d'événements, appelé système complet d'événements associé au couple (X, Y).

Exemple : On lance simultanément 2 dés à 6 faces. On note X le nombre de 1 obtenus et Y le nombre de valeurs différentes obtenues.

2 Probabilités, indépendance d'évenements

2.a Définition d'un espace probabilisé, propriétés

Soit e une expérience aléatoire et A un événement. Comme on ne peut pas prédire si A sera réalisé ou non, on répète un grand nombre n de fois l'expérience e et on considère le nombre de fois r où A a été réalisé.

Intuitivement, pour savoir quelle est la « chance » que A soit réalisé, on considère la fréquence $f(A) = \frac{r}{n}$ pour « n grand » [1].

L'étude des fréquences réelles, c'est la statistique.

Les probabilités forment une branche des mathématiques dont le but est différent : modéliser le réel, définir un cadre théorique pour faire des calculs (par exemple pour calculer la chance qu'un événement a de se réaliser).

Il n'y aura pas de fonction fréquence f mais une fonction probabilité P, qui aura cependant des propriétés communes avec f...

- L'événement Ω est toujours réalisé donc sa fréquence de réalisation est toujours
- Si A et B sont des événements incompatibles, en notant r le nombre de fois où A s'est réalisé au cours des n expériences, et s le nombre de fois où B s'est réalisé, le nombre de fois où A ou B s'est réalisé est exactement $r + s$ donc :

$$f(A \cup B) = \frac{r+s}{n} = \frac{r}{n} + \frac{s}{n} = f(A) + f(B) \ ...$$

Définition :

Soit Ω un ensemble fini.

On appelle probabilité sur Ω toute application P définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$, à valeurs dans $[0, 1]$, vérifiant :

-
-

Dans ce cas, on dit que (Ω, P) est un espace probabilisé fini.

1. Plus précisément, $\frac{r}{n}$ tend, quand n tend vers l'infini, vers ce qu'on souhaite appeler la probabilité de A

Proposition :

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini, et A et B des événements.

- $P(\overline{A}) =$
- $P(\emptyset) =$
- $P(A \backslash B) =$
  et donc, si B est inclus dans A :
- $P(A \cup B) =$
- Si $A \subset B$ alors

Démonstration 1

Proposition :

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini, $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, \ldots, A_n$ événements 2 à 2 incompatibles.

Démonstration 2

En particulier, si $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ avec les ω_i deux à deux distincts, et si A est un événement, $P(A)$ se retrouve à partir des probabilités des événements élémentaires $P(\{\omega\})$:

Proposition :

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et A un événement.

$$P(A) =$$

En particulier, pour $A = \Omega$, on obtient que $\sum_{i=1}^{n} P(\{\omega_i\}) = 1$.

Les $P(\{\omega\})$, pour $\omega \in \Omega$, forment ce qui s'appelle une distribution de probabilités : c'est une famille de réels positifs dont la somme fait 1.
La proposition ci-dessus exprime le fait que la distribution de probabilités formée par les $P(\{\omega\})$ détermine entièrement l'application P.

Ainsi, pour présenter l'application P, il suffit de donner les valeurs des $P(\omega_i)$, par exemple sous la forme d'un tableau :

i	1	2	$\ldots$	n
$P(\{\omega_i\})$				

Exercice : Une souris est face à 5 trous numérotés de 1 à 5. Derrière le trou n°i se trouve i morceaux de fromage. La probabilité que la souris choisisse d'aller dans un trou est proportionnelle à l'odeur de fromage qui s'en dégage (laquelle est proportionnelle à la quantité de fromage qui y est caché).
Déterminer la probabilité que la souris choisisse un trou de numéro pair.

✎ **Démonstration** 3

2.b Cas de la probabilité uniforme

Définition :

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini.
On dit qu'il y a équiprobabilité si tous les événements élémentaires ont même probabilité.
On dit aussi que P est la probabilité uniforme.

Si Ω est de cardinal n, pour toute issue $\omega \in \Omega$, on a alors

Il y a beaucoup de situations où la probabilité est uniforme ; il faut parfois détecter cette équiprobabilité sans que l'énoncé la précise de façon explicite.
Exemples :

Proposition :

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini où P est la probabilité uniforme sur Ω.
Pour tout événement A,

$$P(A) =$$

✎ **Démonstration** 4

Exemples

- On tire 5 cartes dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité de ne tirer aucun as ?
- On lance deux dés non truqués simultanément, et on s'intéresse à la somme des deux chiffres obtenus. Quel univers proposez-vous pour modéliser cette expérience ? Quelle est la probabilité que la somme fasse 6 ?

✎ **Démonstration** 5

2.c Indépendance d'événements

2.c.i Indépendance de deux événements

Définition :

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Deux événements A et B sont dits indépendants si

Exemples :

- On tire au hasard un carte dans un jeu de 52 cartes. On considère les événements R : « la carte tirée est un roi » et T : « la carte tirée est un trèfle ».

- On lance simultanément un dé rouge et un dé bleu. On considère A : "Le dé rouge vaut 6" et B : "Le dé bleu est pair".
- On tire deux fois de suite à pile ou face. On considère A : « les deux lancers donnent le même résultat » et B : « le deuxième lancer donne face ».
  Cas 1 : pièce équilibrée ; Cas 2 : pièce truquée, la probabilité d'obtenir pile est de $\frac{3}{4}$.
  A et B sont-ils indépendants dans le cas 1 ? dans le cas 2 ?
  ✎ **Démonstration** 6

Ainsi l'indépendance de deux événements dépend bien de la probabilité choisie sur Ω.

Proposition :

> Si A et B sont indépendants alors les couples suivants d'événements aussi :

✎ **Démonstration** 7

2.c.ii Indépendance d'une famille d'événements

Définition :

> Soit une famille $(A_1, \ldots, A_n)$ d'événements d'un espace probabilisé (Ω, P).
> On dit que $A_1, \ldots, A_n$ sont <u>indépendants</u> si :

Dans de nombreux exercices, on dispose naturellement de l'indépendance, par exemple :

-

-
-

Un exemple simple où on n'a pas indépendance : tirages sans remise.

⚠ On a : $A_1, \ldots, A_n$ indépendants $\Longrightarrow A_1, \ldots, A_n$ deux à deux indépendants,
mais la réciproque est fausse.

Contre-exemple :

On lance un dé rouge et un dé bleu. On note A : « le résultat du dé rouge est pair » ; B : « le résultat du dé bleu est pair » ; C : « la somme des résultats est pair ».

A, B, C sont deux à deux indépendants mais pas (mutuellement) indépendants.

✎ **Démonstration** 8

3 Probabilités conditionnelles et formules importantes

3.a Probabilités conditionnelles

Commençons par un exemple :
Pour la kermesse de fin d'année, une école achète 250 billes dans deux magasins : 150 chez le magasin "Bazar" et 100 chez le magasin "Codec". Certaines billes sont malheureusement abîmées :

	Magasin Bazar	Magasin Codec
Billes sans défaut	145	80
Billes abimées	5	20

On prend une des 250 billes au hasard et on note les événements suivants :
A : « La bille choisie est abîmée »
B : « La bille choisie vient du magasin "Bazar" »
On s'intéresse à la probabilité que B soit réalisé.

- Il y a équiprobabilité. On a donc $P(B) = \dfrac{150}{250} = \dfrac{3}{5}$.

- Supposons maintenant qu'on dispose d'une information supplémentaire : que la bille choisie est abîmée. Autrement dit, on suppose l'événement A réalisé.

Définition :

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et A un événement de probabilité non nulle.
Pour tout événement B, on appelle probabilité conditionnelle de B sachant A le nombre :

On le note

C'est la probabilité que B soit réalisé, lorsque l'on restreint l'ensemble des issues possibles à A.

On constate tout de suite que, si $P(A) \neq 0$: les événements A et B sont indépendants $\Longleftrightarrow$

Proposition :

Avec les notations de la définition précédente, P_A est une probabilité sur Ω.

Démonstration 9

Corollaire :

Soit A un événement de probabilité non nulle, B et C d'autres événements,

$$P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B) \qquad P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C) - P_A(B \cap C)$$

si $B \subset C$, $P_A(B) \leq P_A(C)$ $\quad P_A(\emptyset) = 0 \qquad P_A(\Omega) = 1 \qquad$ mais aussi

Remarque : Dans les exercices, il n'est pas courant de calculer une probabilité conditionnelle en utilisant la formule de la définition ($P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$), comme on l'a fait dans l'exemple des billes.
En général, c'est la lecture de l'énoncé, la modélisation de l'expérience aléatoire, qui donnent directement la valeur de $P_A(B)$. Les probabilités conditionnelles sont alors plutôt un outil pour calculer des probabilités d'intersection : on a l'égalité $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$ qui permet de calculer $P(A \cap B)$.

Convention : Lorsque $P(A) = 0$, on s'autorisera à écrire $P_A(B)$ dans l'égalité $\boxed{P(A \cap B) = P(A)P_A(B)}$, avec l'idée qu'elle donne alors $0 = 0$.
En effet, $A \cap B \subset A$ donc $0 \leq P(A \cap B) \leq P(A)$, et donc si $P(A) = 0$ alors $P(A \cap B) = 0$ aussi.

3.b Formule des probabilités composées

Commençons par un exemple, avec (Ω, P) un espace probabilisé fini . Soient A, B et C des événements :

$$P(A \cap B \cap C) =$$

$$=$$

Généralisons :

Proposition :

(Formule des probabilités composées)
Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et $A_1, \dots A_n$ des événements. Alors :

Démonstration 10

Cette formule s'utilise en particulier lorsque les événements $A_1, \dots, A_n$ correspondent à un ordre chronologique.

Exemple : Dans un jeu de 32 cartes, on tire successivement 3 cartes (sans remise).
Quelle est la probabilité d'obtenir, dans cet ordre : un valet, une dame, un valet ?

Démonstration 11

3.c Formule des probabilités totales, formule de Bayes

Proposition :

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $(A_1, \dots, A_n)$ un système complet d'événements. Pour tout événement B,

Démonstration 12

Cette formule permet de conditionner l'apparition d'un événement (B) à celle d'autres événements « préliminaires »(les A_i).

Exemples :

- On considère une population constituée à 48% d'hommes et 52% de femmes. La probabilité qu'un homme soit daltonien est de $0,05$; pour une femme, elle est de $0,0025$.
  Quelle est la probabilité, lorsqu'on choisit au hasard un individu, qu'il soit daltonien ?
- Une urne contient 3 boules blanches, 2 boules rouges et 7 boules noires. On tire une boule ; si elle est rouge, on la remet ; sinon, on ne la remet pas. Puis on tire à nouveau une boule. Quelle est la probabilité que la deuxième boule soit noire ?

Démonstration 13

Proposition :

(Formule de Bayes)
Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $(A_1, \dots, A_n)$ un système complet d'événements.Soit B un événement. Pour tout $i_0 \in \{1, \dots, n\}$,

Démonstration 14

Cette formule est aussi appelée « formule des probabilités des causes » : elle permet de déterminer a posteriori la probabilité d'une cause A_{i_0}, parmi toute la panoplie des causes possibles $A_1, \dots, A_n$, à partir du résultat observé B.
$P_B(A_{i_0})$ est la probabilité que la cause du résultat B soit A_{i_0}, on la calcule grâce aux probabilités de chacune des causes A_i et de la probabilité d'obtenir B selon les différentes causes.

Exemple : Reprenons l'exemple du daltonisme : on choisit au hasard une personne dans la population et elle est daltonienne. Quelle est la probabilité que ce soit une femme ?

Démonstration 15

4 Loi d'une variable aléatoire

4.a Loi d'une variable aléatoire

Théorème-définition :

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini, et X une variable aléatoire sur Ω. Notons $E = X(\Omega)$.
On appelle loi de X l'application P_X définie sur $\mathcal{P}(E)$ par :

$$P_X : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(E) & \to & [0,1] \\ A & \mapsto & P(X \in A) \end{array}$$

C'est une probabilité sur $E = X(\Omega)$.

Démonstration 16

Les $P_X(\{x\}) = P(X = x)$ sont alors les probabilités des événements élémentaires pour la probabilité P_X ; ils déterminent donc entièrement la loi P_X de X.
On a immédiatement les résultats suivants (c.f. page 7) :

Proposition :

Avec les notations ci-dessus, et en notant $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ avec les x_i 2 à 2 distincts :

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1$
- Pour toute partie A de $X(\Omega)$, $P(X \in A) = \displaystyle\sum_{x \in A} P(X = x)$

Retenir que donner la loi d'une variable aléatoire X, c'est donner :

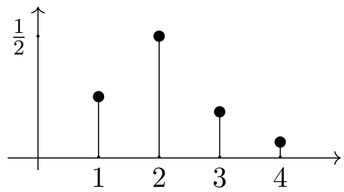
- l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X
- la valeur de $P(X = x)$ pour chaque $x \in X(\Omega)$.

On représente parfois la loi sous la forme d'un tableau, par exemple :

$X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$ et

x	1	2	3	4
$P(X = x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$

Illustration :



Exercice :
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{1, \dots, 2n\}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, telle que :

$$\forall\, k \in \{1, \dots, 2n\},\ P(X = k) = \frac{k}{n(2n+1)}.$$

Comment vérifier que cela correspond bien à une loi de probabilité ?
Déterminer la probabilité que X soit pair.

Démonstration 17

Remarque : On dit que deux variables aléatoires X et Y ont la même loi si $X(\Omega) = Y(\Omega)$ et si $P_X = P_Y$: cela signifie donc que pour tout $x \in X(\Omega) = Y(\Omega)$, $P(X = x) = P(Y = x)$.
On notera alors $\boxed{X \sim Y}$.

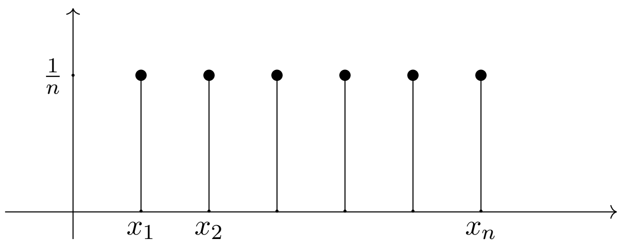
Remarque *(à savoir refaire !)* :
Si X est une variable aléatoire réelle, on peut écrire $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$.
Les valeurs des $P(X \leq x_i)$ permettent alors d'obtenir la loi de X :

4.b Lois usuelles finies

4.b.i Loi uniforme

Définition :

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé Ω, tel que $X(\Omega)$ ait n éléments : $X(\Omega) = E = \{x_1, \ldots, x_n\}$.
On dit que X suit la loi uniforme sur E si :
On note $X \sim \mathcal{U}(E)$.



Exemple :

4.b.ii Loi de Bernouilli (succès ou échec)

Situation-type : On joue à pile ou face, avec une pièce qui donne pile avec probabilité p.
On définit la variable aléatoire X comme le nombre de piles obtenu.
On a $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et la loi de X est donc par : $P(X = 1) = p$, $P(X = 0) = 1 - p$.

Plus généralement :
Définition :

Soit $p \in [0, 1]$. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de Bernouilli de paramètre p si

On note $X \sim \mathcal{B}(p)$. On dit alors que X est une variable de Bernouilli.

Remarque : Notons A l'événement « X prend la valeur 1 ». On peut alors écrire : $X =$
Réciproquement, si A est un événement quelconque, synonyme de « succès », $X =$ est une variable aléatoire de Bernouilli de paramètre

4.b.iii Loi binomiale (nombre de succès)

Situation-type : On répète n fois une expérience, comme jouer à pile ou face avec une pièce donnant pile avec probabilité p. On note X le nombre de "succès" (de piles) obtenus.
Les valeurs possibles de X sont 0, 1, ..., n.
Fixons $k \in \{0, \dots, n\}$.
Considérons l'événement $A = S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_k \cap E_{k+1} \cap \dots \cap E_n$, où :
S_i : "on a un pile (succès) à l'essai n° i"
E_i : "on a un face (échec) à l'essai n° i".
Les n lancers étant indépendants, les événements $S_1, \dots, S_k, E_{k+1}, \dots, E_n$ sont indépendants et :

$$P(A) = P(S_1) \dots P(S_k) P(E_{k+1}) \dots P(E_n) = p^k (1-p)^{n-k}.$$

On obtient la même probabilité si on impose d'avoir k "pile" à des places $i_1, \dots, i_k$ fixées, et "face" aux places restantes ; en notant $A_{i_1,\dots,i_k}$ l'événement correspondant, on a encore $P(A_{i_1,\dots,i_k}) = p^k(1-p)^{n-k}$.

L'événement $(X = k)$ est

Définition :

> Soit $p \in [0, 1]$. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n et p si
>
> On note $X \sim \mathcal{B}(n, p)$. On dit alors que X est une variable binomiale.

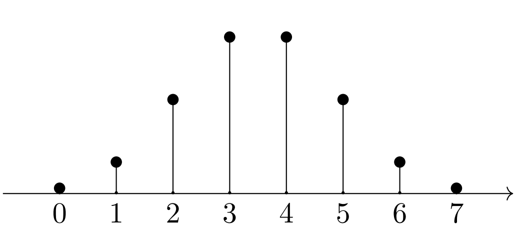
Le raisonnement ci-dessus montre que, pour une variable aléatoire X :

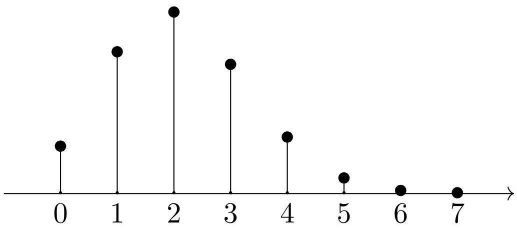
- Si X est le nombre de "succès"
- lorsqu'on répète n fois une même expérience aléatoire
- où la probabilité de succès vaut p (à chaque fois)
- les n répétitions étant indépendantes

Alors X suit la loi binomiale de paramètre n et p.

Autre exemple-type : Une urne contient r boules rouges et b boules blanches. On effectue n tirages avec remise dans cette urne, et on note X le nombre de boules rouges obtenues :

Pour $n = 7$ et $p = 0.5$, puis $p = 0.3$:





Remarques

- Une loi X qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(1, p)$ est

- Dans l'exemple-type initial, on peut noter, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, X_i la variable aléatoire égale à 1 s'il y a succès au $i$ème essai, et 0 sinon.

  La réciproque est vraie :
  Si $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes (c.f. fin du cours !) et suivent toutes la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ alors
  $$X_1 + \cdots + X_n \text{ suit la loi binomiale } \mathcal{B}(n, p)$$

4.c Loi d'une fonction de X

Définition :

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire sur Ω.
Soit g une fonction, définie au moins sur $X(\Omega)$, à valeurs dans un ensemble F.
On définit la variable aléatoire $g(X)$ de la façon suivante :

$$g(X) : \begin{array}{rcl} \Omega & \to & F \\ \omega & \mapsto & g\left(X(\omega)\right) \end{array}$$

Cela désigne en fait $g \circ X$!

Proposition :

(loi d'une fonction de X)
Avec ces notations, pour tout y dans $g(X)(\Omega)$,

$$P\big(g(X) = y\big) = \sum_{x \in g^{-1}(\{y\})} P(X = x)$$

Autrement dit, on somme sur tous les $x \in X(\Omega)$ tels que $g(x) = y$.

Illustration :

Exemples :

a) On reprend une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = \{-1, 1, 2\}$ et de loi donnée par :

x	-1	1	2
$P(X = x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

. Déterminer la loi de $Y = X^2$.

b) On choisir un entier entre 1 et $2n$, on note X le nombre obtenu.
On pose $Y = \left\lfloor \frac{X}{2} \right\rfloor$. Déterminer la loi de Y.

✎ **Démonstration** 18

5 Couples de variables aléatoires, indépendance de variables aléatoires

5.a Couples de variables aléatoires

On va des résultats pour des couples (X, Y) de variables aléatoires, mais la plupart s'étendent à des n-uplets $(X_1, \dots, X_n)$ de variables aléatoires.

5.a.i Loi conjointe d'un couple de variables aléatoires

Définition :

On appelle loi conjointe du couple (X, Y) la loi de la variable aléatoire :

$$\begin{array}{rccl} (X,Y) : & \Omega & \to & X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ & \omega & \mapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array}$$

Donner la loi de (X, Y), c'est donc :
$\boxed{\text{donner } X(\Omega),\ Y(\Omega) \text{ et les valeurs de } P\left((X = x) \cap (Y = y)\right) \text{ pour tout } x \in X(\Omega) \text{ et tout } y \in Y(\Omega)}$.

Pour les "petits" exemples, on peut représenter la loi conjointe avec un tableau à double entrée :

	$Y = y_1$	$Y = y_2$	$\dots$	$Y = y_p$
$X = x_1$				
$\vdots$				
$X = x_n$				

où $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, $Y(\Omega = \{y_1, \dots, y_p\}$, et on place $P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$ à la position (i, j).

Les $(X = x_i) \cap (Y = y_j)$ forment un système complet d'évé., d'où $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} P(X = x_i) \cap (Y = y_j)) = 1$.
Autrement dit la somme de tous les éléments du tableau vaut 1.

Remarque : $P\left((X = x) \cap (Y = y)\right)$ peut se noter $P\left(X = x, Y = y\right)$.

Exemple : On lance 2 fois de suite une pièce qui donne pile avec probabilité $\frac{1}{3}$.
On note X le nombre de piles obtenus et Y le rang d'obtention du premier pile, avec la convention que $Y = 0$ si on n'obtient aucun pile.
Déterminer la loi conjointe de (X, Y).

Démonstration 19

5.a.ii Lois marginales

Définition :

> La loi de X s'appelle la première loi marginale du couple (X, Y).
> De même, la loi de Y s'appelle la deuxième loi marginale du couple (X, Y)

Comme les $\left((Y = y)\right)_{y \in Y(\Omega)}$ forment un système complet d'événement, on a, pour tout $x \in X(\Omega)$:

Autrement dit, $\boxed{\text{la loi de } X \text{ peut s'obtenir à partir de la loi conjointe du couple.}}$

De même, $\boxed{\text{on peut trouver la loi de } Y \text{ à partir de la loi conjointe du couple}}$ pour tout $y \in Y(\Omega)$:

Sur le tableau, cela revient à sommer sur les lignes ou sur les colonnes. Reprenons l'exemple :

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{4}{9}$	0	0
1	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$
2	0	$\frac{1}{9}$	0

⚠ On ne peut pas, réciproquement, trouver la loi conjointe du couple (X, Y) seulement à partir des lois marginales ! (sauf lorsque X et Y sont indépendantes, c.f. plus loin...).

5.a.iii Loi conditionnelle d'une variable aléatoire

Très souvent, pour calculer les probabilités $P\left((X=x)\cap(Y=y)\right)$, on va passer par des probabilités conditionnelles, et plus précisément utiliser la formule des probabilités conditionnelles. Donnons d'abord une définition générale :

Définition :

> Soit A un événement de probabilité non nulle.
> La loi de Y sachant A est la donnée de tous les $P_A(Y=y)$, pour tout $y\in Y(\Omega)$.

En pratique, lorsqu'on a un couple de variables aléatoires (X,Y), on s'intéresse beaucoup à la loi de Y sachant $(X=x)$, avec $x\in X(\Omega)$ fixé :

La loi de de Y sachant $(X=x)$ est la donnée de :

La loi de de Y sachant X est la donnée de :

Par définition d'une probabilité conditionnelle, $P_{(X=x)}(Y=y)=\dfrac{P\left((X=x)\cap(Y=y)\right)}{P(X=x)}$; autrement dit, si on connaît la loi du couple (X,Y), on connaît la loi de Y sachant X.

Cependant, ce qui apparaît naturellement dans l'énoncé de l'exercice est souvent :

- la loi de X
- la loi de Y sachant X.

On calcule alors la loi de Y grâce à la formule des probabilités totales, avec le s.c.e $\left((X=x)\right)_{x\in X(\Omega)}$.

Exemple : Une urne contient 6 boules numérotées de 1 à 6. On tire une boule, on note X son numéro. On remet cette boule dans l'urne et on retire toutes les boules dont le numéro était strictement supérieur à X. On tire alors à nouveau une boule dans l'urne, on note Y son numéro. Déterminer la loi de Y.

Démonstration 20

5.a.iv Fonction d'un couple de variables aléatoires

Comme pour les fonctions d'une seule variable aléatoire :

Proposition :

> Soit g une fonction définie au moins sur $X(\Omega)\times Y(\Omega)$. On peut trouver la loi de $g(X,Y)$ à partir de la loi conjointe de (X,Y) :

Exemple : loi de $X+Y$ dans notre premier exemple :

5.b Variables aléatoires indépendantes

Définition :

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini.
On dit que des variables aléatoires X et Y sont indépendantes si pour toute partie A de $X(\Omega)$ et toute partie B de $Y(\Omega)$,

$$P\left((X \in A) \cap (Y \in B)\right) = P(X \in A)P(Y \in B).$$

Autrement dit, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ doivent être indépendants pour toutes les parties A et B possibles.

Notation : on peut écrire $X \perp\!\!\!\perp Y$ pour signifier que X et Y sont indépendantes.

Proposition :

Avec les mêmes notations, X et Y sont indépendantes si et seulement si :

Exemple : Dans l'exemple des parties 5.a.i et 5.a.ii , X et Y sont-elles indépendantes ?

Comme pour la notion d'événements indépendants, souvent, on tire l'indépendance des variables de la lecture de l'énoncé. Par exemple, si on lance un dé vert et un dé rouge, et qu'on note X le résultat du dé vert, Y le résultat du dé rouge, les variables X et Y sont indépendantes.

Proposition :

Soient f et g deux fonctions définies sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ respectivement.
Si X et Y sont indépendantes, alors $f(X)$ et $g(Y)$ aussi.

Ces définitions et propriétés s'étendent au cas de n variables aléatoires :

Définition :

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et $X_1, \dots X_n$ des variables aléatoires.
On dit que $X_1, \dots X_n$ sont indépendantes si pour tout $(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{P}\left(X_1(\Omega)\right) \times \cdots \times \mathcal{P}\left(X_n(\Omega)\right)$, les événements $(X_1 \in A_1)$, …, $(X_n \in A_n)$ sont indépendants.

Cela revient à dire que si pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$:

$$P\left((X_1 = x_1) \cap \dots (X_n = x_n)\right) = P(X_1 = x_1) \dots P(X_n = x_n)$$

⚠ Si $X_1, \dots X_n$ sont indépendantes, alors elles sont indépendantes 2 à 2, mais la réciproque est fausse.

Proposition :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$.
Si X_1, ..., X_n sont indépendantes et suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre p, alors $X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi binomiale de paramètres n et p.

Proposition :

(Lemme des coalitions) Soient X_1, ..., X_n des variables aléatoires indépendantes, $p \in \{1, \ldots, n-1\}$ et f, g des fonctions telles que les variables aléatoires $f(X_1, \ldots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \ldots, X_n)$ soient bien définies.
Alors les variables (de "coalition") $f(X_1, \ldots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \ldots, X_n)$ sont indépendantes.

Ce résultat est souvent simple à utiliser malgré les apparences : par exemple, il nous permet d'affirmer que si X, Y et Z sont indépendantes, alors $X + Y$ et Z sont indépendantes.
Cela se généralise à plus de deux "coalitions" : par exemple, si X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 sont indépendantes, alors $X_1 - X_2$, X_3^2 et $\exp(X_4 + X_5)$ sont indépendantes...

Plan du cours