Chapitre 17. Matrices et déterminants.

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

1.a Matrice colonne d'un vecteur dans une base

Définition :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
Notons, pour x un vecteur de E, $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$:

La matrice colonne du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$ est définie par :

On note :

Exemples :

- Dans $E = \mathbb{R}^2$, avec $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, et $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$:

- De manière plus générale, dans $E = \mathbb{K}^n$, avec $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, et $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$:

- ⚠ Si on ne se place plus dans la base canonique, ça change !
Prenons par exemple, dans $E = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}' = (f_1, f_2)$ avec $f_1 = (0, 1)$ et $f_2 = (1, 1)$:

- ⚠ L'ordre des vecteurs dans la base est important :
Prenons par exemple, dans $E = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}'' = (f_2, f_1)$:

- Dans $E = \mathbb{R}_4[X]$,
  avec $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$, et $P = X^3 - 5X^2 + X - 3$:

  Réciproquement, le polynôme $Q \in \mathbb{R}_4[X]$ tel que $\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{mat}}\ Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ est :

- Dans $E = \mathbb{C}_n[X]$, avec $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{C}_n[X]$ et $P = (X+1)^n$:

- Dans $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, avec $\mathcal{B}$ la base canonique et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

Proposition :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $\mathcal{B}$ une base de E.
L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ x & \mapsto & \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{mat}}\ x \end{array}$ est un isomorphisme.

Autrement dit, deux informations :

- Un vecteur de E est entièrement déterminé par sa matrice dans la base $\mathcal{B}$
- Pour tout x et tout y dans E, et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{mat}}(\lambda x + y) = \lambda \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{mat}}\ x + \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{mat}}\ y$

1.b Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

Définition :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
Soit $(v_1, \ldots, v_p)$ une famille de vecteurs de E.
La matrice de la famille $(v_1, \ldots, v_p)$ dans la base $\mathcal{B}$ est définie comme la matrice de taille $n \times p$ dont la j-ième colonne est $\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{mat}}\ v_j$:

On note :

Avec ces notations, et en notant $a_{i,j}$ les coefficients de la matrice A, on :

Exemples :

- Dans $E = \mathbb{R}^3$, posons $v_1 = (2,1,1)$, $v_2 = (2,2,1)$, $v_3 = (0,2,0)$, $v_4 = (1,0,1)$.

- Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, posons $P_1 = 1$, $P_2 = X - 1$, $P_3 = (X-1)^2$.

⚠ L'ordre des vecteurs e_i dans la base compte, mais aussi l'ordre des v_j.

Remarque : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, notons $C_1, \ldots, C_p$ ses colonnes. On peut identifier ses colonnes (éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$) à des vecteurs de $\mathbb{K}^n$. Et alors :

1.c Lien avec l'inversibilité des matrices carrées

Lorsque $p = n$, la matrice est carrée, on peut parler d'inversibilité :

Proposition :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille de vecteurs de E.

$$(v_1, \ldots, v_n) \text{ base de } E \iff \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{mat}}\,(v_1, \ldots, v_n) \text{ inversible}$$

✎ **Démonstration** 1

Ce résultat est très utile en pratique !

Exemples d'application :

- Posons $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (4,5,6)$, $v_3 = (7,8,9)$. La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
- Montrer que la famille $(X^2 + 3X + 1, 2X^2 + X, X^2)$ est libre.

✎ **Démonstration** 2

Remarque :
Rappelons qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice de la famille de ses colonnes $(C_1, \ldots, C_n)$ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Donc :

$$\begin{aligned} A \text{ inversible } &\iff \\ &\iff \\ &\iff \end{aligned}$$

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2 Matrices d'une application linéaire dans des bases

2.a Définition et premiers exemples

Définition :

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, avec $p = \dim E \in \mathbb{N}^*$ et $n = \dim F \in \mathbb{N}^*$.
Soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E, $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de F.
Soit enfin u une application linéaire de E dans F.
On a vu que u était entièrement déterminée par les images $u(e_1)$, ... $u(e_p)$.
Chacun de ces vecteurs de F est entièrement déterminé par ses coordonnées dans la base $\mathcal{C}$:

La matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq p}$ s'appelle la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.
On la note

Finalement,

Exemples :

- Matrice de $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x+2y, 3x-y) \end{array}$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$:

- Matrice de u dans les bases $\mathcal{B} = ((0,1),(1,1))$ et $\mathcal{C} = ((1,0,1),(1,1,0),(1,1,1))$:

- Quelle est l'application linéaire u de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_1[X]$ dont la matrice dans les bases canoniques associées est : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$?

Remarque : Lorsqu'on a un endomorphisme, $E = F$, et on peut prendre $\mathcal{B} = \mathcal{C}$; on note alors $\underset{\mathcal{B}}{\text{mat}}\, u$ et on parle de matrice de l'endomorphisme u dans la base $\mathcal{B}$.
Cette matrice est carrée !

Exemple à connaître : Soit E un $\mathbb{K}$ev de dimension n, et $\lambda \in \mathbb{K}$.
La matrice de l'homothétie de rapport λ dans n'importe quelle base $\mathcal{B}$ de E est

Exemple à connaître : Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Notons r la rotation du plan d'angle θ autour de O, c'est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Déterminons sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$:

Définition :

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Prenons $E = \mathbb{K}^p$, $F = \mathbb{K}^n$ munis des bases canoniques.
L'application $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ telle que $\underset{can}{\text{mat}}\ u = A$ s'appelle l'application linéaire canoniquement associée à A.

Exemple : Déterminer l'application linéaire f canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Proposition :

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, avec $p = \dim E \in \mathbb{N}^*$ et $n = \dim F \in \mathbb{N}^*$.
Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E, $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F.
L'application $\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{L}(E,F) & \to & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ & u & \mapsto & \underset{\mathcal{B},\mathcal{C}}{\text{mat}}\ u \end{array}$ est un isomorphisme.

Autrement dit, deux informations :

- Une application linéaire u de E dans F est entièrement déterminé par sa matrice dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$
- Pour tout u et tout v dans $\mathcal{L}(E,F)$, et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\underset{\mathcal{B},\mathcal{C}}{\text{mat}}\,(\lambda u + v) = \lambda \underset{\mathcal{B},\mathcal{C}}{\text{mat}}\ u + \underset{\mathcal{B},\mathcal{C}}{\text{mat}}\ v$

Démonstration 3

Corollaire :

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.
Alors $\mathcal{L}(E,F)$ est de dimension finie et $\dim(\mathcal{L}(E,F)) =$

Démonstration 4

2.b Traduction de $y = u(x)$

Proposition :

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$, et F un $\mathbb{K}$-ev de base $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$.
Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $x \in E$ et $y \in F$. On note $A = \underset{\mathcal{B},\mathcal{C}}{\text{mat}}\ u$ et $X = \underset{\mathcal{B}}{\text{mat}}\ x$.
$\boxed{\text{La matrice dans la base } \mathcal{C} \text{ de } u(x) \text{ est } AX}$, autrement dit :

En notant y un vecteur de F et $Y = \underset{\mathcal{C}}{\text{mat}}\ y$, on a donc la traduction matricielle de $y = u(x)$:

Démonstration 5

Exemples d'application :

- Trouver l'application linéaire u canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$:

- Trouver la matrice dans les bases canoniques de $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-y+3z, 2x+y-2z) \end{array}$:

- On a vu que la rotation vectorielle r d'angle θ a pour matrice :

  Donc pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $r(x,y) =$

- Soit u l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans les bases canoniques est : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$.

  Démonstration 6

Proposition :

Soient A et B des matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

$$\big(\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}), \quad AX = BX\big) \iff A = B$$

Démonstration 7

2.c Lien entre produit matriciel et composition, entre inversibilité et bijectivité

Proposition :

Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives q, p, n dans $\mathbb{N}^*$.
Soient $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ des bases respectives de E, F, G. Soient $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$.

En particulier, dans le cas $E = F = G$ et $\mathcal{B} = \mathcal{C} = \mathcal{D}$:

Démonstration 8

On en tire par récurrence un résultat pour les puissances d'endomorphisme :

Théorème :

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Soient $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ des bases respectives de E et F. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$.

$$u \text{ bijective } \iff$$

et dans ce cas,

En particulier, dans le cas courant où $E = F$ et $\mathcal{B} = \mathcal{C}$:

Démonstration 9

Exemple : Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(x,y) = (3x+y, -x+2y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
1) Déterminer $f \circ f$.
2) Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Démonstration 10

Nous pouvons maintenant justifier le résultat très pratique suivant :

Proposition :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned} A \text{ est inversible } &\iff \exists\, B \in M_n(K), AB = I_n \quad (\text{ ie } A \text{ est inversible à droite}) \\ &\iff \exists\, B \in M_n(K), BA = I_n \quad (\text{ ie } A \text{ est inversible à gauche}) \end{aligned}$$

Dans ce cas, la matrice B est A^{-1}.

Démonstration 11

3 Changement de base

3.a Introduction

- Soit $R = X^2 - 3X + 4$, $R \in \mathbb{R}_2[X]$. On a $Y = \underset{can}{\text{mat}}\ R =$

  Prenons d'autre part $\mathcal{B}' = \big(1, X-1, (X-1)^2\big)$; c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ car

  Cherchons $Y' = \underset{\mathcal{B}'}{\text{mat}}\ R$:

  Question : quel est le lien entre Y et Y' ?

- Soit $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x+2y, 3x-y) \end{array}$. On a $A = \underset{can}{\text{mat}}\ u =$

  Prenons d'autre part $\mathcal{B}' = ((0,1),(1,1))$ (base de $\mathbb{R}^2$) et $\mathcal{C}' = ((1,0,1),(1,1,0),(1,1,1))$ (base de $\mathbb{R}^3$). ‘
  Cherchons $A' = \underset{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}{\text{mat}}\ u$:

  Question : quel est le lien entre A et A' ?

3.b Matrices de passage

Définition :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, et $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de E.
On appelle <u>matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$</u> et on note $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice de la famille $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.
Autrement dit,

Exemples :

- La matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$, à $\mathcal{B}' = \big(1, X-1, (X-1)^2\big)$ est :

- La matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = ((1,0),(0,1))$ à $\mathcal{B}' = ((0,1),(1,1))$ est :

- La matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ à $\mathcal{B}' = ((1,0,1),(1,1,0),(1,1,1))$ est :

Remarque :

Proposition :

Soient $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}''$ des bases d'un ev E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

- $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}} =$
- $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''} =$
- $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est

Démonstration 12

3.c Formule de changement de base pour un vecteur

Proposition :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et soit $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ des bases de E.
Pour $x \in E$, on note :

Alors

Démonstration 13

Exemples :

- Calculer les coordonnées de $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ dans la base $\mathcal{B}' = ((1,0,1),(1,1,0),(1,1,1))$.
  Démonstration 14

- Soit, dans $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ la base canonique, et $\mathcal{B}'$ la base polaire formée des vecteurs $\overrightarrow{u}_\theta$, $\overrightarrow{v}_\theta$.
  Écrire les formules de changement de base.
  Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $x^2 - 2\sqrt{3}xy - y^2 + 2\sqrt{3}x + 6y - 4 = 0$ dans le repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.
  Comment faire pour obtenir l'équation de $\mathcal{C}$ dans le repère polaire $(O, \overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{v}_\theta)$?
  Justifier qu'avec $\theta = \dfrac{\pi}{3}$, on se retrouve avec une équation sans terme croisé.

  Démonstration 15

3.d Formule de changement de base pour une application linéaire, matrices semblables

Proposition :

Soient E et F des $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ des bases de E, $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ des bases de F.
Pour $u \in \mathcal{L}(E, F)$, on note :

Alors

Démonstration 16

En particulier, dans le cas d'un endomorphisme : $E = F$, en prenant $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, $\mathcal{B}' = \mathcal{C}'$:

Exemple : Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que $\mathcal{B}' = ((1, 1), (1, -1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$, et déterminer la matrice A' de u dans $\mathcal{B}'$.
2) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n puis u^n.

Démonstration 17

Remarque : Dans l'exemple précédent, une base bien choisie (dans laquelle la matrice de u est "simple") était donnée... Mais on peut aussi faire dans l'autre sens, c'est-à-dire chercher une base dans laquelle la matrice de u a une forme simple :

Exemple : Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à $M = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^2$ telle que la matrice de u dans $\mathcal{B}'$ soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Démonstration 18

Définition :

Soient A et A' dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On dit que les matrices A et A' sont <u>semblables</u> s'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A' = P^{-1}AP$.

Dans cette définition, les rôles de A et A' sont bien symétriques.
En effet, s'il existe une matrice P inversible telle que $A' = P^{-1}AP$, alors $PA' = AP$ puis $PA'P^{-1} = A$.
En posant $Q = P^{-1}$, on a bien une matrice inversible telle que $A = Q^{-1}A'Q$.

Dans l'exemple précédent, on obtient donc que $M = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Proposition :

Deux matrices carrées A et A' sont semblables si et seulement si elles représentent un même endomorphisme, mais dans des bases différentes.

Démonstration 19

Exemple : Montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Démonstration 20

4 Noyau, image et rang d'une matrice

4.a Définitions, propriétés de l'image et du noyau

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et u l'application linéaire canoniquement associée à A. On a $u : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$.

Notons $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, $X = \underset{can}{\text{mat}}\, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $Y = \underset{can}{\text{mat}}\, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

On a vu que : $u(x) = y \Longleftrightarrow AX = Y$.

On décide d'identifier x avec X, y avec Y ; cela revient donc à identifier $\mathbb{K}^p$ à $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}^n$ à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, et l'application $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \to & \mathbb{K}^n \\ x & \mapsto & u(x) \end{array}$ à l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & AX \end{array}$.

On a donc les objets suivants :
- le noyau de A noté $\text{Ker}(A)$;
- l'image de A noté $\text{Im}(A)$;
- le rang de A noté $\text{rg}(A)$; c'est $\dim(\text{Im}(A))$.

Ce sont en fait le noyau, l'image et le rang de u !

Notons $(e_1, \ldots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$.
On sait comment A est formée : ses colonnes sont les coordonnées des images $u(e_j)$ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$, donc $\boxed{\text{les colonnes } C_j \text{ de } A \text{ sont les vecteurs } u(e_j)}$ eux-mêmes !

Comme $\text{Im}(u) = \text{Vect}\,(u(e_1), \ldots, u(e_p))$:
$\boxed{\text{Im}(A) = \text{Vect}\,(C_1, \ldots, C_p) : \text{les colonnes de } A \text{ engendrent l'image de } A}$.
De même $\boxed{\text{rg}(A) = \text{rg}\,(C_1, \ldots, C_p)}$.

Comme $\text{Ker}(u)$ est l'ensemble des solutions de $u(x) = 0$:
$\boxed{\text{Ker}(A) \text{ est l'ensemble des solutions de } AX = 0 : \text{les lignes de } A \text{ donnent un système d'équation du noyau de } A}$.

Exemple : Avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, trouvons l'image et le noyau :

Comme u, l'application linéaire canoniquement associée à la matrice A, vérifie le théorème du rang, la matrice A aussi :

Théorème :

> (Théorème du rang) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Bonus : Utilisation d'une combinaison linéaire nulle $\lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_p C_p = 0$:
On peut en trouver une avec $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \neq (0, \ldots, 0)$, si $(C_1, \ldots, C_p)$ est liée. Double utilité :

- En isolant une des colonnes dans l'égalité, on peut supprimer cette colonne dans l'écriture de $\mathrm{Im}(A)$ comme $\mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_p)$.
- Cela fournit aussi un vecteur non nul du noyau : le vecteur $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$!

Contentons-nous de le visualiser sur un exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Démonstration 21

Effet des opérations élémentaires :

- Sur les colonnes de A (échange, multiplication par un scalaire non nul, ajout à une colonne d'une combinaison linéaire des autres colonnes) : on sait que $\mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_p)$ est alors inchangé.
  Ainsi, $\boxed{\text{les opérations élémentaires sur les colonnes de } A \text{ ne changent pas l'image}}$.
- Sur les lignes de A : on sait que le système $AX = 0$ est alors changé en un système équivalent, i.e. avec le même ensemble des solutions.
  Ainsi, $\boxed{\text{les opérations élémentaires sur les lignes de } A \text{ ne changent pas le noyau}}$.

Cas d'une matrice carrée : u est alors un endomorphisme en dimension finie, donc on sait :

$$u \text{ bijective} \iff u \text{ injective} \iff u \text{ surjective}$$

D'où :

Théorème :

> Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (carrée).

4.b Propriétés du rang, calcul du rang

Les propriétés suivantes découlent de celles du rang d'une application linéaire :

Proposition :

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

- $\boxed{\mathrm{rg}(A) \leq \min(n,p)}$
- $\mathrm{rg}(AB) \leq \min(\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B))$
- $\boxed{\text{Le rang d'une matrice ne change pas quand on la multiplie par une matrice inversible}}$:
  Si B est inversible alors $\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}(A)$, si A est inversible alors $\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}(B)$.

Nous savons que les opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice reviennent à des multiplications (à gauche ou à droite) par des matrices inversibles d'où :

Corollaire :

Les opérations élémentaires (sur les lignes ou sur les colonnes) ne changent pas le rang.

Le rang d'une matrice A est le rang de la famille de ses colonnes ; mais aussi de la famille des lignes grâce au théorème (admis) suivant :

Proposition :

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Le rang de A est aussi celui de sa transposée : $\boxed{\mathrm{rg}(A^T) = \mathrm{rg}(A)}$.

Corollaire :

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, notons $L_1, \dots, L_n$ ses lignes.

$$\boxed{\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(L_1, \dots, L_n) = \dim\left(\mathrm{Vect}(L_1, \dots, L_n)\right)}.$$

Récapitulons les outils à notre disposition pour **calculer le rang d'une matrice** :

- Effectuer des opérations élémentaires sur les lignes et/ou colonnes (on peut mélanger !).
  L'algorithme du pivot de Gauss est souvent intéressant.
- Utiliser $\mathrm{rg}(A) = \dim\left(\mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_p)\right)$ (on peut souvent éliminer des C_j dans cette écriture)
- Utiliser $\mathrm{rg}(A) = \dim\left(\mathrm{Vect}(L_1, \dots, L_n)\right)$ (on peut souvent éliminer des L_i dans cette écriture)
- Si A est carrée de taille n et inversible, on sait que $\mathrm{rg}(A) = n$.
  En particulier, se rappeler qu'une matrice triangulaire est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.

Exemples Déterminer le rang des matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$,

$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 5 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

✎ **Démonstration** 22

Le rang d'une matrice A a été défini comme le rang de la famille de ses colonnes $(C_1, \dots, C_p)$.
Cette famille est composée de vecteurs d'un ev non quelconque : $\mathbb{K}^n$.
A est la matrice de cette famille, mais dans une base très spécifique : la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
Heureusement, on a un résultat plus général : dès que A représente une famille $(v_1, \dots, v_p)$ dans une base quelconque d'un ev quelconque, les notions de rang coïncident !

Théorème :

> Soit E un ev de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E et $(v_1, \dots, v_p)$ une famille de vecteurs de$E$.
> Si $A = \underset{\mathcal{B}}{\text{mat}}\ (v_1, \dots, v_p)$, alors $\text{rg}(v_1, \dots, v_p) = \text{rg}(A)$.

Même phénomène pour les applications linéaires :

Théorème :

> Soient E et F des ev de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{C}$ une base de F, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
> Si $A = \underset{\mathcal{B},\mathcal{C}}{\text{mat}}\ f$, alors $\text{rg}(f) = \text{rg}(A)$.

Puisque le rang d'une matrice est plutôt facile à calculer, cela peut-être une bonne idée de passer par une matrice pour calculer le rang d'une famille ou d'une application linéaire !

Exemples :

- Déterminer le rang de la famille de polynômes (P_1, P_2, P_3, P_4) où $P_1 = X^3 + 2X^2 + X - 1$, $P_2 = 2X^2 + X + 1$, $P_3 = -2X^3 + 3X^2$, $P_4 = X^3 + X^2$.
- Déterminer le rang de l'endomorphisme : $f : \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & A + A^T \end{array}$.

Démonstration 23

4.c Rang d'un système

On considère un système linéaire, mis sous la forme

$$(S) \ : \ AX = B$$

avec $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ matrice colonne des inconnues, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ matrice colonne second membre.
On définit alors le rang du système (S) comme étant celui de A : $\boxed{\text{rg}(S) = \text{rg}(A)}$.

(S) peut se voir comme une équation linéaire avec l'application linéaire $u : X \mapsto AX$.
Les résultats du chapitre 14 s'appliquent :

- L'ensemble des solutions du système homogène associé $AX = 0$ est $\text{Ker}(A)$.
  Il est de dimension $p - \text{rg}(A)$ d'après le théorème du rang.
- L'ensemble des solutions de (S) est soit vide, soit de la forme $X_0 + \text{Ker}(A)$ avec X_0 une solution particulière.

Remarques :

- Le système (S) possède au moins une solution si et seulement si B possède au moins un antécédent par u, autrement dit :
  $\boxed{\text{Le système } AX = B \text{ est compatible si et seulement si } B \in \mathrm{Im}(A).}$
- Lorsque A est carrée de taille n, (S) possède une unique solution si et seulement si A est inversible (i.e. si et seulement si $\mathrm{rg}(S) = n$). On dit alors qu'il s'agit d'un système de Cramer.

5 Déterminants

$n \in \mathbb{N}^*$.

5.a Définition du déterminant d'une matrice carrée

Définition :

Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ une application. On dit que f est :

- n-linéaire par rapport aux colonnes si elle est linéaire par rapport à chaque colonne :

- antisymétrique par rapport aux colonnes si :

En géométrie plane, on utilisera parfois le produit mixte sur $\mathbb{R}^2$, qu'on peut voir comme une application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$; c'est l'application suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} & \mapsto & ad - bc \end{array}$$

Cette application est 2-linéaire par rapport aux colonnes (on dit aussi : bilinéaire par rapport aux colonnes) et elle est antisymétrique par rapport aux colonnes.

Démonstration 24

En géométrie dans l'espace, on utilisera parfois le produit mixte sur $\mathbb{R}^3$, qu'on peut voir comme une application de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$; c'est l'application suivante :

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ & \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} & \mapsto & aei + dhc + bfg - (ceg + fha + ibd) \end{array}$$

On pourrait de même montrer que cette application est 3-linéaire par rapport aux colonnes et antisymétrique par rapport aux colonnes.

Proposition :

Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ une application n-linéaire et antisymétrique par rapport aux colonnes. Alors, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a deux colonnes identiques, on a $f(A) = 0$ (on dit que f est alternée).

Démonstration 25

Théorème-définition :

Il existe une unique forme $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ n-linéaire et antisymétrique par rapport aux colonnes qui vérifie $f(I_n) = 1$.
Le nombre $f(A)$ est alors noté $\det(A)$ et on l'appelle le déterminant de A.
Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, on note :

$$\det(A) =$$

On constate que le produit mixte de I_2 vaut 1, donc le produit mixte sur $\mathbb{R}^2$ correspond bien au déterminant d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; on a donc :

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Démontrons le théorème dans le cas $n = 2$:

Démonstration 26

De même, on constate que le produit mixte de I_3 vaut bien 1, donc le produit mixte sur $\mathbb{R}^3$ correspond bien au déterminant d'une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$; on a donc :

$$\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} =$$

Cette formule pour les déterminants de taille 3 est déjà un peu compliquée. En taille $n \geq 4$, une formule existe mais en pire. Pour calculer un déterminant, nous allons donc voir d'autres méthodes que l'application bête et méchante d'une formule.

Cependant, pour le déterminant en taille 3, en dernier recours, vous pourrez utiliser la formule ci-dessus ; il y a un moyen mnémotechnique pour la retrouver, appelé "règle de Sarrus" :

$$\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$$

5.b Premières propriétés

Proposition :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Si deux colonnes de A sont identiques, alors
- Si une colonne de A au moins est nulle, alors
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda.A) =$

Démonstration 27

Proposition :

(Effet des opérations élémentaires sur le déterminant) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- L'opération $C_i \leftrightarrow C_j$, avec $i \neq j$,
- L'opération $C_i \leftarrow \mu C_i$, avec $\mu \neq 0$,
- L'opération $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et $i \neq j$,

Démonstration 28

Proposition :

(Transposée) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\det(A^T) = \det(A)$

Conséquence très importante :
Dans les deux propositions qui précédaient, on peut remplacer "lignes" par "colonnes" ! !

On comprend quelle sera la méthode pour calculer un déterminant : il faudra faire des opérations sur les lignes et/ou sur les colonnes pour obtenir une matrice plus "simple" dont on connaît le déterminant...

5.c Développement par rapport à une ligne ou par rapport à une colonne

Commençons par le cas $n = 3$:

- Développement par rapport à la 1ère colonne :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} =$$

- Développement par rapport à la 2ème colonne :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} =$$

- Développement par rapport à la 3ème colonne :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} =$$

- Développement par rapport à la 1ère ligne :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} =$$

- etc...

Proposition :

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Formule de développement par rapport à la colonne j :

  où $\Delta_{i,j}$ est le déterminant de taille $n-1$, obtenu en supprimant la i-ème ligne de A et la j-ème colonne de A.
- Formule de développement par rapport à la ligne i :

Remarque : $\Delta_{i,j}$ s'appelle le mineur d'ordre (i,j), $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$ s'appelle le cofacteur d'ordre (i,j).

L'idée est d'utiliser l'une de ces formules pour une ligne ou une colonne qui comporte $\boxed{\text{beaucoup de 0}}$: de sorte qu'il n'y ait en fait qu'un ou deux termes dans la somme $\sum$.

Proposition :

(Déterminant d'une matrice diagonale, d'une matrice triangulaire)

✎ **Démonstration** 29

5.d Exemples de calculs

Méthode générale : Faire des opérations élémentaires sur A pour obtenir une matrice "simple", par exemple diagonale ou triangulaire, ou bien avec une ligne ou colonne possèdant beaucoup de 0.
On privilégie :

— les échanges de lignes ou de colonnes : penser à mettre -1 en facteur à chaque fois !

— Les transvections $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ou $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ qui ne changent pas le déterminant.

Exemples :

1) $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 1 & 1 & & \vdots \\ 3 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{vmatrix}$

2) $V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$ déterminant de Vandermonde, à calculer directement sous forme factorisée.

3) Pour $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, calculer $\det(A - \lambda I_3)$, directement sous forme factorisée.

✎ **Démonstration** 30

5.e Produit, inversibilité, inverse

Proposition :

Soient A et B des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

On en tire, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que

⚠ Ne pas inventer de formule pour la somme, il n'y en a pas !

Proposition :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$A \text{ inversible } \iff$$

et dans ce cas, $\det(A^{-1}) =$

✎ **Démonstration** 31

La formule vue pour A^n ci-dessus se généralise donc à $n \in \mathbb{Z}$ lorsque A est inversible.

5.f Déterminant d'une famille de n vecteurs dans une base, déterminant d'un endomorphisme

Définition :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, et $\mathcal{B}$ une base de E.
Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille de $\boxed{n}$ vecteurs de E.
On appelle <u>déterminant de $(v_1, \ldots, v_n)$ dans la base $\mathcal{B}$</u>, et on note $\det_{\mathcal{B}}(v_1, \ldots, v_n)$, le déterminant de la matrice de $(v_1, \ldots, v_n)$ dans la base $\mathcal{B}$:

Ce nombre dépend de la base $\mathcal{B}$ choisie !

Les notions de produit mixte de deux et trois vecteurs dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement correspondent à cette notion de déterminant, en prenant la base canonique.

Proposition :

On garde les notations de la définition ci-dessus.

$$(v_1, \ldots, v_n) \text{ base de } E \iff$$

Théorème-définition :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, et $u \in \mathcal{L}(E)$.
Le nombre $\det\left(\operatorname*{mat}_{\mathcal{B}} u\right)$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ choisie.
Ce nombre est appelé <u>déterminant de u</u>, on le note $\det(u)$.

Démonstration 32

Le déterminant d'un endomorphisme u s'obtient donc en calculant le déterminant de la matrice de u dans n'importe quelle base !

Proposition :

Soit u et v des endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-ev E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

- $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda u) =$
- $\det(u \circ v) =$
- u bijective $\iff$

  et dans ce cas, $\det(u^{-1}) =$

Exemples d'utilisation :

1) Montrer que $(((1,1,1),(1,-1,2),(-1,1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2) Montrer que $f : (x,y,z) \mapsto (2x+y-z, x+y, -x+y)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Démonstration 33

Plan du cours