Chapitre 15. Fiche-cours : décomposition en éléments simples des ~~fractions~~ fonctions rationnelles.

Le résultat au programme

Théorème : (Admis)

Supposons que l'on ait une fonction rationnelle $f : x \mapsto \dfrac{A(x)}{B(x)}$, avec A et B des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, de la forme suivante :

$$\forall x \in \mathbb{K}\backslash\{x_1, \dots, x_p\}, \quad f(x) = \frac{A(x)}{(x - x_1)\dots(x - x_p)}$$

Avec les conditions suivantes :

- les x_i sont deux à deux distincts *(on dit que f est "à pôles simples")* ;
- $\deg(A) < \deg(B) = p$.

Alors il existe un unique p-uplet de coefficients $(a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{K}\backslash\{x_1, \dots, x_p\}, \ f(x) = \frac{a_1}{x - x_1} + \dots + \frac{a_p}{x - x_p}.$$

Remarque : on suppose donc ici que B est unitaire, mais c'est facile de se ramener à ce cas.

Et les autres situations ?

→ Si f est à pôles simples mais que $\deg(A) \geq \deg(B)$

On se ramène à la situation du théorème en effectuant la division euclidienne de A par B !

On obtient alors E et R tels que $A = EB + R$ et $\deg(R) < \deg(B)$, donc, là où c'est défini :

$$f(x) = E(x) + \frac{R(x)}{B(x)} \text{ avec } \deg(R) < \deg(B)$$

→ Si f n'est pas à pôles simples

Cela correspond aux cas où B a des racines multiples, et aux cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et que B a des facteurs irréductibles de degré 2 dans sa factorisation sur $\mathbb{R}$ ...
La forme de la décomposition en éléments simples n'est pas à connaître et doit être fournie par l'énoncé.

⚠ Soyez attentif à la formulation de l'énoncé : selon que l'on admette ou non l'existence de l'écriture voulue, il faut adapter votre raisonnement. Comparez par exemple :

On admet qu'il existe d'uniques réels a, b, c, d tels que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$,

$$\frac{3x - 1}{(x - 1)^2(x^2 + 1)} = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{(x - 1)^2} + \frac{cx + d}{x^2 + 1}$$

Les déterminer.

Montrer qu'il existe d'uniques réels a, b, c, d, que l'on déterminera, tels que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$,

$$\frac{3x - 1}{(x - 1)^2(x^2 + 1)} = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{(x - 1)^2} + \frac{cx + d}{x^2 + 1}$$

Résolution d'un système
(souvent fait au 1er semestre)
C'est fastidieux...

Écrire le numérateur comme une
combinaison linéaire des facteurs du dénominateur

Exemple 1 : $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$:

Exemple 2 : $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)(x-2)}$:

Apparition-disparition

Exemple :

$\dfrac{1}{x(x+1)} =$

Comment trouver les nombres $a_1, \ldots, a_p$?

Nouvelle méthode rapide !

Multiplier l'égalité par $(x - x_k)$ puis "évaluer" en x_k :
cela fournit la valeur de a_k !

Exemple avec $f(x) = \dfrac{3x-4}{(x-2)(x-3)(x+2)}$.

Pour plus de rigueur, au lieu d'évaluer en x_k, il faudrait faire tendre x vers x_k... lorsque x_k est réel ; on admet que la méthode est valide aussi pour les x_k complexes.

Autres méthodes en vrac

On peut obtenir des égalités vérifiées par les a_i, par exemple :

Évaluer l'égalité en un x bien choisi, différent des x_i (parfois 0 est une bonne idée) :

Multiplier l'égalité par x puis faire tendre x vers l'infini :

$\rightarrow$ **Si f est à pôles simples mais que** $\deg(A) \geq \deg(B)$

Exemple : $f : x \mapsto \dfrac{3x^4 - 8x^3 + 2x^2 + 8x - 6}{x^2 - 3x + 2}$

$\rightarrow$ Si f n'est pas à pôles simples

Exemple : On admet qu'il existe d'uniques réels a, b, c, d tels que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$,

$$\frac{3x-1}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{cx+d}{x^2+1}$$

Déterminer ces réels a, b, c, d.