Chapitre 15. Polynômes.

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 L'ensemble $\mathbb{K}[X]$

1.a Introduction

Jusqu'à présent, on ne distinguait pas les "polynômes" des "fonctions polynomiales réelles", c'est-à-dire les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \end{array} \qquad \text{avec } n \in \mathbb{N},\ a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}.$$

Par exemple, la fonction $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x^2 - 5x + 3 \end{array}$ est une fonction polynomiale.

Mais on peut aussi avoir des fonctions polynomiales complexes : $\begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & 3z^2 + z - 1 \end{array}$

Des polynômes de matrices carrées : $2M^2 - 5M + 3I_n$, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ...

Un polynôme est une notion plus abstraite (notion "formelle") qui permettra entre autres de manipuler des expressions $P(x)$ avec un x qui peut être autre chose qu'un nombre. On notera $P = 2X^2 - 5X + 3$, où X s'appelle l'indéterminée.

On pourra alors, remplacer (ou substituer) l'indéterminée X dans $P = 2X^2 - 5X + 3$:

- Pour un réel (ou un complexe) x, $P(x) = 2x^2 - 5x + 3$: c'est un réel.

- Pour une matrice M carrée d'ordre $n \geq 1$, $P(M) = 2M^2 - 5M + 3I_n$: c'est une matrice.
  Remarque : Le terme constant 3 devient $3I_n$; il faut le voir comme $3X^0$, donc remplacé par $3M^0$.

- Pour un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-ev E, $P(f) =$
  c'est un endomorphisme de E.

De quoi avons-nous besoin pour définir la notion un polynôme formel P ?

$$\boxed{\text{Uniquement de la liste de ses coefficients.}}$$

Comme il s'agit d'une nouvelle notion, il faudra définir des opérations "formelles" sur les polynômes : $+ \ . \ \times \ \circ$ et dérivée formelle...

1.b Definition d'un polynôme, degré

Définition :

On appelle polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ toute suite $P = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, \dots)$ d'éléments de $\mathbb{K}$ nulle à partir d'un certain rang. P sera noté :

$P =$

X s'appelle *l'indéterminée.*
Les a_k sont appelés les coefficients du polynôme.

Puisque par définition, un polynôme est égal à la suite de ses coefficients :
Proposition :

Deux polynômes sont égaux si et seulement si tous leurs coefficients respectifs sont égaux.

Exemples :

- $P = 2 - 3X + 5X^2$
- Lorsque tous les a_k sont nuls, on obtient le polynôme nul, noté 0 (ou $0_{\mathbb{K}[X]}$).

  Un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.
- Lorsque tous les a_k avec $k \geq 1$ sont nuls, $P = a_0$, on dit que P est un polynôme constant. (Le polynôme nul est en particulier un polynôme constant)
- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, a_k est le coefficient de degré k, $a_k X^k$ est le terme de degré k.
  Un polynôme avec un seul terme, de la forme $a_k X^k$, s'appelle un monôme.

Remarque : X est donc un polynôme, c'est le polynôme $X = (0, 1, 0, \dots, 0, \dots)$.
De même, $X^2 = (0, 0, 1, 0, \dots, 0, \dots)$, $X^0 = (1, 0, 0, \dots, 0, \dots)$...
De manière générale, $X^k = (0, 0, \dots, \underbrace{1}_{\text{position } k+1}, 0, \dots)$.

Définition :

Avec les notations ci-dessus :

- $\boxed{\text{Si } P \neq 0}$, alors on appelle degré de P le plus grand entier p tel que $a_p \neq 0$.
  On le note $\deg(P)$ ou d°P.
  Si p est le degré de P, a_p s'appelle le coefficient dominant de P,
  $a_p X^p$ s'appelle le terme dominant de P.
- Si le coefficient dominant de P vaut 1, on dit que P est unitaire ou normalisé.
  Exemple :
- Par convention, si $P = 0$, alors $\deg(P) =$

En particulier :

$$\begin{aligned} P \text{ constant} &\iff \\ P \text{ non constant} &\iff \\ P \text{ constant non nul} &\iff \end{aligned}$$

⚠ Lorsqu'on écrit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, cela ne signifie pas que P est de degré n !
Car a_n peut être nul dans cette écriture...
Pour que P soit de degré n, bien penser à préciser : $a_n \neq 0$.

Définition :

- L'ensemble de tous les polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}[X]$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, de degré inférieur ou égal à n, est noté $\mathbb{K}_n[X]$:

$$\mathbb{K}_n[X] =$$

Exemples :

2 Opérations de base sur les polynômes

2.a Somme et multiplication par un scalaire

Un polynôme est en fait une suite (la suite des coefficients), la loi + et . seront celles connues sur $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$:
Pour $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k, Q = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$ où $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, et $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$P + Q = \qquad\qquad \lambda . P =$$

Ce sont bien des polynômes (coefficients nuls à partir d'un certain rang).
Proposition :

L'ensemble $(\mathbb{K}[X], +, .)$ est

Proposition :

Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- Pour le degré de $P+Q$, on n'a qu'une inégalité :

  Cependant,
- $\deg(\lambda.P) =$

Remarque : on utilise la convention que $-\infty < n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemples : $P = 1 + 2X + 3X^2, \quad Q = 3 - 2X, \quad R = 1 + X^2, \quad S = X - 3X^2$

-
-
-

Proposition :

Soit $n \in \mathbb{N}$. $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$. On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{K}_n[X] &= \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \ / \ (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \right\} \\ &= \end{aligned}$$

2.b Produit

La définition de la multiplication est plus technique. Prenons un exemple.
Soient $P = a_0 + a_1X + a_2X^2, Q = b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3$ deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
On veut définir $P \times Q$ de manière à ce que :

$$\begin{aligned}P \times Q &= (a_0 + a_1X + a_2X^2) \times (b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3) \\ &= \end{aligned}$$

Ce qui amène la définition générale suivante :

Définition :

Soient $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k, Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ ($(p,q) \in \mathbb{N}^2$).

On pose :

$$P \times Q = \qquad\qquad\qquad \text{où} \qquad c_k =$$

Proposition :

Soient P, Q, R trois polynômes, $\lambda \in \mathbb{K}$, $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. Alors,

- $PQ = QP$
- $(PQ)R = P(QR)$
- $P(Q+R) = PQ + PR$ et $(P+Q)R = PR + QR$
- $X^{p+q} = X^p X^q = X^q X^p$
- $P \times 0 = 0 \times P = 0$
- $P \times 1 = 1 \times P = P$
- $\lambda.(P \times Q) = P \times (\lambda.Q) = (\lambda.P) \times Q$

Proposition :

On utilise les conventions : $(-\infty) + (-\infty) = -\infty \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ n + (-\infty) = -\infty$.

Pour tous polynômes P et Q de $\mathbb{K}[X]$,

$$\deg(PQ) =$$

Proposition :

$\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$,

$$PQ = 0 \iff P = 0 \text{ ou } Q = 0$$

Conséquence : si R est un polynôme $\boxed{\text{non nul}}$,

$$PR = QR \iff P = Q$$

2.c Composition des polynômes

Définition :

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, et Q, deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ ($n \in \mathbb{N}$).
On note $P \circ Q$ ou $P(Q)$ le polynôme :

$$P(Q) =$$

Exemple : Si $P = X^3 - X + 1$,
$P(X^2) =$

$P(X+1) =$

$P(2X^2 - X) =$

Remarques :

- On remarque que $P \circ X = P$, autrement dit P et $P(X)$ sont un seul et même polynôme.
- On utilise souvent les "translatés" de P ie les polynômes de la forme $P(X+a)$ où $a \in \mathbb{K}$.
- Pour tous polynômes P, Q, R, et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $(\lambda P + Q)(R) = \lambda P(R) + Q(R)$.

Proposition :

Si Q est non nul, alors $\deg(P \circ Q) =$

Exemple : $P(X^2)$ a pour degré $2\deg(P)$.

Proposition-définition :

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in K[X] (n \in \mathbb{N})$.

- On dit que P est un <u>polynôme pair</u> si
  C'est équivalent à :
- On dit que P est un <u>polynôme impair</u> si
  C'est équivalent à :

✎ **Démonstration** 1

Exemple : $P = 5X^8 - 7X^6 + 2X^2 - 1$
$Q = 5X^8 - 7X^6 + 2X - 1$.

3 Divisibilité, division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$

3.a Divisibilité

Définition :

Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On dit que $\underline{P \text{ divise } Q}$ et on note $P|Q$ si :

On dit aussi que Q est un multiple de P ou encore que P est un diviseur de Q.

Exemples : $X^3 - 1$

Proposition :

- Tout polynôme P divise
- Si $P|Q$ et $Q \neq 0$ alors
- $\forall\,(P, Q, R) \in (\mathbb{K}[X])^3$, $P|Q$ et $Q|R \Longrightarrow$

Démonstration 2

⚠ Si on a $P|Q$ et $Q|P$, ne pas conclure que $P = Q$! On obtient seulement que

Démonstration 3

3.b Division euclidienne

Théorème :

Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tels que $B \neq 0$.
Alors, il existe un unique couple (Q, R) de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tels que :

Il s'agit de la division euclidienne de A par B ; Q est le quotient et R est le reste.

Démonstration 4 (unicité uniquement)

Sur des exemples concrets de petit degré, la division euclidienne peut se faire à la main :
exemple avec $A = 2X^4 - 2X^2 + X - 1$ et $B = X^2 + X - 1$

Proposition :

Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tels que $B \neq 0$.

$$B \text{ divise } A \iff \text{le reste de la division euclidienne de } A \text{ par } B \text{ est nul}$$

4 Substitution, fonction polynomiale

Considérons l'égalité de polynômes suivante :

$$P(X) = X^3 - 1 = (X-1)(X^2 + X + 1)$$

Sur certains ensembles disposant de lois $+$, . et $\times$ aux propriétés suffisantes (en particulier, distributivité de $\times$ sur $+$, commutativité...), on peut écrire des égalités semblables où l'on a "substitué" X ($1 = X^0$ doit être remplacé par l'élément neutre pour la "multiplication"). Par exemple :

$$\begin{aligned}
\text{Pour } x \in \mathbb{R} \text{ ou } x \in \mathbb{C} : \quad & P(x) = \quad x^3 - 1 \quad = \quad (x-1)(x^2 + x + 1) \\
\text{Pour } M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : \quad & P(M) = M^3 - I_n = (M - I_n)(M^2 + M + I_n) \\
\text{Pour } f \in \mathcal{L}(E) : \quad & P(f) = f^3 - \mathrm{id}_E = (f - \mathrm{id}_E) \circ (f^2 + f + \mathrm{id}_E)
\end{aligned}$$

(Dans ce dernier exemple, la "multiplication" est en fait la composition)

Cependant, ce n'est pas parce que, pour une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ particulière on a $A^2 = A + 2I_3$ (exercice 13 du TD13), que l'on peut en dire que le polynôme X^2 est égal au polynôme $X + 2$!

Pourtant, dans le cas de la substitution par un réel, avec P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, on voudrait écrire :

$$\big(\forall\, x \in \mathbb{R},\ P(x) = Q(x)\big) \iff P = Q$$

Mais ça n'a rien d'évident a priori... Nous allons justifier ce résultat dans la partie 5.

Définition :

Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ ($n \in \mathbb{N}$). La <u>fonction polynomiale associée à P</u> est :

$$\tilde{P} :$$

On a alors $\widetilde{P+Q} = \tilde{P} + \tilde{Q}$, $\widetilde{\lambda P} = \lambda \tilde{P}$, $\widetilde{PQ} = \tilde{P}\tilde{Q}$, $(\widetilde{P \circ Q}) = \tilde{P} \circ \tilde{Q}$.

On verra que $\tilde{P} = \tilde{Q} \iff P = Q$, ce qui explique l'abus de notation habituel : $\tilde{P}$ est souvent noté P.

Exemples : Pour $P = X^2 - 1$, $\tilde{P}(2) = 2^2 - 1 = 3$. On notera souvent $P(2) = 3$.
Pour $P = X$:
Pour $P = 1$:

5 Racines d'un polynôme

5.a Racine d'un polynôme

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

Définition :

On dit que α est une racine (ou un zéro) de P si $\tilde{P}(\alpha) = 0$.

Une équation de la forme $P(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{K}$, avec $P \in \mathbb{K}[X]$, s'appelle une équation algébrique. La résoudre, c'est trouver les racines de P.

Proposition :

Le reste de la division euclidienne de P par $X - \alpha$ est
En conséquence, α est racine de P si et seulement si

Démonstration 5

Application habituelle : $P = X^3 - X^2 - X - 2$. Déterminer les racines de P.

Démonstration 6

5.b Racines distinctes

Proposition :

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sont p racines distinctes de P, alors

Démonstration 7

Corollaire :

On suppose P de degré n, avec $n \in \mathbb{N}$ (en particulier, P n'est pas le polynôme nul).

Démonstration 8

Conséquences très importantes

- Si un polynôme P de degré inférieur ou égal à n admet (au moins) $n + 1$ racines distinctes alors P est le polynôme nul.

- Si un polynôme P admet une infinité de racines alors P est le polynôme nul.

Conséquence très importante :

Proposition :

Soient P et Q dans $\mathbb{K}[X]$. On a : $\tilde{P} = \tilde{Q} \Longleftrightarrow P = Q$, c'est-à-dire :

$$\big(\forall\, x \in \mathbb{K}, \quad P(x) = Q(x)\big) \Longleftrightarrow P = Q$$

Démonstration 9

On peut avoir à refaire la démonstration en remplaçant "$\forall\, x \in \mathbb{K}$" par "$\forall\, x \in I$" avec I partie infinie de $\mathbb{K}$. Autrement dit, il faut savoir démontrer que si les fonctions polynomiales associées à P et Q coïncident en une infinité de valeurs, alors P et Q sont égaux en tant que polynômes.

Exemples d'application

- Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{3} (P(k))^2 = 0$. Que dire de P ?
- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall\, \theta \in \mathbb{R},\ P(\cos(\theta)) = 0$. Que dire de P ?

Démonstration 10

5.c Multiplicité des racines

Définition :

Soient P un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

- On dit que α est racine d'ordre au moins k de P si

  On dit aussi que α est racine de multiplicité au moins k de P.
- On dit que α est racine d'ordre k (exactement) de P si

  On dit aussi que α est racine de multiplicité k (exactement) de P.
  C'est équivalent à dire :

Soit k l'ordre de multiplicité d'une racine α de P :

- Si $k = 1$, on dit que α est racine simple de P
- Si $k > 1$, on dit que α est racine multiple de P ; en particulier...
  - Si $k = 2$, on dit que α est racine double de P
  - Si $k = 3$, on dit que α est racine triple de P...

Exemple : Soit $P = X(X-1)^2(X-4)(X-5)^3$.

Proposition :

Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$. On suppose que P admet p racines distinctes $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ de multiplicités respectives au moins égales à $k_1, \dots, k_p$. Alors,

Corollaire :

On suppose P de degré n, avec $n \in \mathbb{N}$ (en particulier, P n'est pas le polynôme nul).

6 Dérivation des polynômes

6.a Polynôme dérivé

Définition :

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ $(n \in \mathbb{N})$.
On appelle polynôme dérivé de P le polynôme :

$$P' =$$

Dans le cas $n \geq 1$, par le changement d'indice

Remarque : Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on constate que la fonction polynômiale associée au polynôme P' est bien la fonction dérivée de $\tilde{P}$: $\tilde{P'} = (\tilde{P})'$

Proposition :

- Le degré de P' est
- $P' = 0 \iff P$ constant.

Proposition :

Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$.
$(P+Q)' = P' + Q'$; $(\lambda.P)' = \lambda.P'$; $(PQ)' = P'Q + PQ'$; $(P \circ Q)' = Q' \times P' \circ Q$

Que dire de $D : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}[X] & \rightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$?

Que dire de la restriction de D à $\mathbb{K}_n[X]$?

Définition :

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On définit par récurrence les polynômes dérivés successifs de P en posant : $P^{(0)} = P$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P^{(n+1)} = (P^{(n)})'$.

Proposition : Formule de Leibniz

Pour tous polynômes P et Q de $\mathbb{K}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$(PQ)^{(n)} =$$

Proposition : Dérivée $k^{\text{ème}}$ de X^n, d'un polynôme quelconque

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Si $P = X^n$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $P^{(k)} = \left\{ \right.$
- Conséquence : si $P = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j$ avec $n \geq 1$, alors

$$P^{(k)} = \left\{ \right.$$

6.b Formule de Taylor

Théorème :

Soient P un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors,

$$P =$$

$$=$$

En particulier, pour $\alpha = 0$:

$$P =$$

Comme les polynômes dérivés $P^{(k)}$ sont nuls pour $k > \deg(P)$, cette formule est encore valable en prenant, pour n, un entier supérieur ou égal à $\deg(P)$.

✎ **Démonstration** 11

6.c Application à la recherche de la multiplicité d'une racine

Soient P un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}^*$.
On utilise la convention suivante : α racine d'ordre 0 de P signifie que α n'est pas racine de P.

Théorème :

- α est racine d'ordre au moins k de P si et seulement si
- α est racine d'ordre k de P si et seulement si

✎ **Démonstration** 12

Cas particuliers à bien connaître :

- α racine simple de $P \iff$
- α racine double de $P \iff$
- α racine multiple de $P \iff$

Exemple : Soit $P = 2X^4 - 5X^3 + 3X^2 + X - 1$. Factoriser P.

✎ **Démonstration** 13

7 Polynômes scindés

7.a Définition

Définition :

Soit un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ de degré $n \geq 1$ (autrement dit, P n'est pas constant.).
On dit que P est scindé sur $\mathbb{K}$ si

Remarque importante : Cela revient à dire que :

Autre formulation : P est scindé s'il peut s'écrire sous la forme :

où

Le degré de P est alors

Exemples :

- $-X^2 + 3X - 2$
- $X^2 + 1 =$

Proposition :

(Une condition suffisante) Soit P un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$.

7.b Relations entre les racines et les coefficients d'un polynôme scindé

Proposition :

Soit $P = aX^2 + bX + c$ un polynôme $\mathbb{K}[X]$ scindé de degré 2 ($a \neq 0$). Pour $x_1, x_2 \in \mathbb{K}$:

$$x_1 \text{ et } x_2 \text{ sont les racines de } P \iff \begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Retenir en particulier le cas d'un polynôme unitaire :

- $(X - \alpha)(X - \beta) = X^2 - (\alpha + \beta)X + \alpha\beta$
- $X^2 - SX + P$ est un polynôme dont la somme des racines vaut S et le produit vaut P.

En pratique, on se sert souvent de la conséquence suivante :

Corollaire :

Soient x_1 et x_2 des éléments de $\mathbb{K}$.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = S \\ x_1 x_2 = P \end{cases} \iff x_1 \text{ et } x_2 \text{ sont les racines de } X^2 - SX + P$$

Proposition :

Soit $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$, que l'on suppose <u>scindé</u> et de degré $n \in \mathbb{N}^*$.

On note $x_1, \ldots, x_n$ ses racines (comptées avec leurs multiplicités). Alors,

$$\begin{cases} x_1 + \cdots + x_n = \\ x_1 \ldots x_n = \end{cases}$$

Démonstration 14

Exemple :

Soit $P = a_3 X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré 3. On note x_1, x_2, x_3 ses racines.

Alors $\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right.$

On peut même aller plus loin en développant le polynôme :

8 Factorisation des polynômes

8.a Dans $\mathbb{C}[X]$

Théorème : D'Alembert-Gauss

> Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Un polynôme non constant P de $\mathbb{C}[X]$ s'écrit donc $P = (X - \alpha)Q$, avec $Q \in \mathbb{C}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$.
On peut recommencer avec Q s'il n'est pas constant : $Q = (X - \beta)R$ d'où $P = (X - \alpha)(X - \beta)R$.
On peut recommencer avec R...
... Et ainsi de suite jusqu'à obtenir un polynôme constant $\mu \in \mathbb{K}^*$. Autrement dit :

Théorème :

> Tout polynôme P non constant de $\mathbb{C}[X]$ est .
> P s'écrit donc de manière unique (à l'ordre près des facteurs) :
>
> où
>
> μ est nécessairement le coefficient dominant de P.

Exemples : Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ les polynômes suivants :
$P = X^4 + X^3 - X - 1$; $Q = X^5 + 1$; $R = (X^2 - 2X + 2)^2$.

✎ **Démonstration** 15

Définition :

> On dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ non constant est irréductible si P n'est divisible que par les polynômes constants non nuls et par les λP avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

D'après ce qui précède, dans $\mathbb{C}[X]$, les polynômes irréductibles sont
Le théorème ci-dessus est donc le théorème de décomposition en facteurs irréductibles de $\mathbb{C}[X]$.

Une conséquence importante du théorème :
Corollaire :

⚠ Ces résultats sont faux dans $\mathbb{R}[X]$.
Par exemple, le polynôme n'admet pas de racine dans $\mathbb{R}$.

8.b Dans $\mathbb{R}[X]$

Proposition :

> Soient $P \in \mathbb{R}[X]$. On peut voir P comme un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, et donc considérer ses racines complexes.
> Si α est une racine complexe de P, alors $\overline{\alpha}$ est aussi une racine complexe de P, avec le même ordre de multiplicité.

Démonstration 16

Exemples : Vérifier ce résultat sur les polynômes suivants, et les factoriser dans $\mathbb{R}[X]$:
$P = X^4 + X^3 - X - 1$; $Q = X^5 + 1$; $R = (X^2 - 2X + 2)^2$.

Démonstration 17

Généralisons : les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont

On a encore un théorème de décomposition d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ en facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$:

Théorème :

> Tout polynôme P non constant de $\mathbb{R}[X]$ s'écrit de manière unique (à l'ordre près des facteurs) :
>
> où
>
> μ est nécessairement le coefficient dominant de P, les α_i sont les racines réelles de P.

Un méthode possible (ce n'est pas forcément la seule) pour obtenir cette décomposition dans $\mathbb{R}[X]$:
- D'abord trouver la décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ (cela revient à trouver toutes les racines complexes et leurs multiplicités)
- Garder les termes avec racines réelles
- Regrouper deux par deux les termes avec racines complexes non réelles (on rassemble $(X - \alpha)^m$ et $(X - \overline{\alpha})^m$) : cela donne les termes de la forme $(X^2 + pX + q)^m$ avec discriminant < 0.

Une autre méthode, sans passer par les complexes, est d'utiliser des identités remarquables (c.f. dernier exemple page 18).

8.c Quelques exemples

- **Proposition :**

  Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ de $X^n - 1$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$) :

  $$X^n - 1 =$$

Démonstration 18

Par exemple, $X^4 - 1 =$.

Se rappeler aussi de la factorisation "partielle" vue en début d'année :

$$X^n - 1 =$$

Par exemple, $X^3 - 1 =$

- Pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $\rho > 0$,

$$X^2 - 2\cos\theta X + 1 =$$
$$X^2 - 2\rho\cos\theta X + \rho^2 =$$

- $P = (X^2+1)^2 - 4X^4$: Cherchons les décompositions de P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et de $\mathbb{C}[X]$ de plusieurs manières différentes :

Plan du cours

1 L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ **1**

1.a Introduction . . . 1

1.b Definition d'un polynôme, degré . . . 2

2 Opérations de base sur les polynômes **3**

2.a Somme et multiplication par un scalaire . . . 3

2.b Produit . . . 4

2.c Composition des polynômes . . . 6

3 Divisibilité, division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$ **7**

3.a Divisibilité . . . 7

3.b Division euclidienne . . . 7

4 Substitution, fonction polynomiale **8**

5 Racines d'un polynôme **9**

5.a Racine d'un polynôme . . . 9

5.b Racines distinctes . . . 9

5.c Multiplicité des racines . . . 10

6 Dérivation des polynômes **11**

6.a Polynôme dérivé . . . 11

6.b Formule de Taylor . . . 13

6.c Application à la recherche de la multiplicité d'une racine . . . 13

7 Polynômes scindés **14**

7.a Définition . . . 14

7.b Relations entre les racines et les coefficients d'un polynôme scindé . . . 14

8 Factorisation des polynômes **16**

8.a Dans $\mathbb{C}[X]$ . . . 16

8.b Dans $\mathbb{R}[X]$ . . . 17

8.c Quelques exemples . . . 18