Chapitre 12. Dérivation.

Dans tout le chapitre, $\boxed{I \text{ désigne un intervalle de } \mathbb{R} \text{ et } a \text{ un point de } I}$.

1 Définitions, premières propriétés

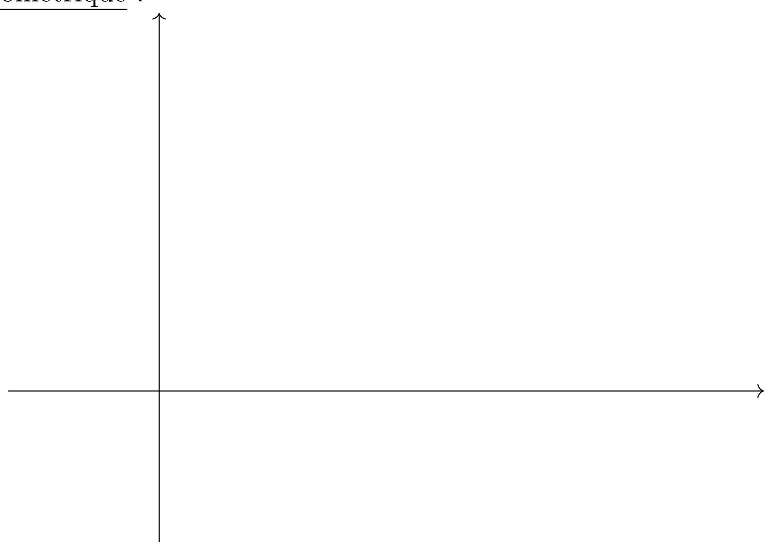
1.a Dérivabilité en un point

Définition :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est dérivable en a si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie en a.
On note alors $f'(a)$ cette limite, et on l'appelle nombre dérivé de f en a.

Remarques :

- On note parfois ce nombre $\dfrac{df}{dx}(a)$.
- Ainsi : f dérivable en $a \iff \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie
  $\iff \boxed{\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}}$ existe et est finie.
- Interprétation géométrique :



Notons $D_{a,x}$ la corde qui joint les points $M_a(a, f(a))$ et $M(x, f(x))$ de la courbe représentative de f en repère orthonormé. Sa pente est $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
Dire que f est dérivable en a, c'est dire que cette corde $D_{a,x}$ a une position limite quand x tend vers a, qui n'est pas verticale. Cette position limite est la tangente à la courbe en M_a.
Ainsi $f'(a)$ est alors la pente de la tangente en M_a, qui a pour équation :

Si $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \pm\infty$, f n'est pas dérivable en a mais la courbe a une tangente verticale en M_a.

Exemple : Soit $f : \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x^2 - x^3}. \end{array}$ Étudier la dérivabilité de f en 0 et en 1.

Démonstration 1

1.b Lien avec la continuité

Proposition :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
Si f est dérivable en a alors f est continue en a.

Démonstration 2

⚠ La réciproque est bien sûr fausse. Contre-exemples :

1.c Lien avec les développements limités d'ordre 1

Proposition :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

$$f \text{ dérivable en } a \iff \exists\, \alpha_0 \in \mathbb{R},\ \exists\, \alpha_1 \in \mathbb{R},\ f(x) \underset{x \to a}{=} \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + o\left((x-a)\right)$$

Si c'est le cas, $\alpha_0 = f(a)$ et $\alpha_1 = f'(a)$, donc : $f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o\left((x-a)\right)$.

Démonstration 3

<u>Interprétation graphique</u> :

Remarque : On rappelle que si $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$,

$$f \text{ continue en } a \iff$$

Et si $f : I \backslash \{a\} \to \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$,

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \ell + o(1) \iff$$

⚠ Il n'y a pas de résultat du même type pour l'ordre 2 ; en particulier, "f deux fois dérivable en a" n'est pas équivalent à "f a un DL à l'ordre 2 en a".

Utilisation d'un DL pour trouver la tangente et la position par rapport à la tangente

Exemple : On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \dfrac{1 - \cos(x)}{x}$.
a) Montrer que f se prolonge par continuité en 0 et que f, ainsi prolongée, est dérivable en 0.
Que vaut $f'(0)$? Quelle est la tangente T à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f en 0 ?
b) Déterminer la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T au voisinage de 0.

Démonstration 4

1.d Dérivabilité à gauche, à droite

Définition :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est dérivable à gauche en a (respectivement à droite en a) si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie à gauche (resp. à droite) en a.
Cela revient à dire que la fonction $f|_{]-\infty, a] \cap I}$ est dérivable en a (resp. $f|_{[a, +\infty[\cap I}$).

On note alors $f'_g(a)$ cette limite (resp. $f'_d(a)$), et on l'appelle nombre dérivé à gauche de f en a (resp. à droite en a).

Exemple : La fonction $f : x \mapsto |x|$ est dérivable à gauche et à droite en 0, et $f'_g(0) =$, $f'_d(0) =$.

Interprétation graphique :
Dire qu'une fonction f est dérivable à gauche en a, c'est dire qu'elle admet une demi-tangente à gauche en M_a, non verticale. Le coefficient directeur est alors $f'_g(a)$.
De même à droite.

Proposition :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

$$f \text{ dérivable en } a \iff f \text{ dérivable à gauche et à droite en } a, \text{ et } f'_g(a) = f'_d(a)$$

Dans ce cas, on a $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.

1.e Dérivabilité sur un intervalle, fonction dérivée

Définition :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I.
Dans ce cas, la fonction $f' : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R} \\ a & \mapsto & f'(a) \end{array}$ s'appelle la fonction dérivée de f.
On la note aussi $\dfrac{df}{dx}$.

On note $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I.

En conséquence d'une propriété précédente :

Proposition :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I.

Autrement dit, $\mathcal{D}(I, \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.

2 Opérations

2.a Opérations algébriques

Proposition :

Soient f et g des fonctions de I dans $\mathbb{R}$.
Si f et g sont dérivables en a (respectivement sur I), alors $f+g$, $\lambda.f$ (pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$), fg, f^n (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$) sont dérivables en a (resp. sur I) et :

$$\begin{array}{ll}
(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a) & (\text{resp. } (f+g)' = f' + g' \ ) \\
(\lambda.f)'(a) = \lambda.f'(a) & (\text{resp. } (\lambda.f)' = \lambda.f' \ ) \\
(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a) & (\text{resp. } (fg)' = f'g + fg' \ ) \\
(f^n)'(a) = nf'(a)f^{n-1}(a) & (\text{resp. } (f^n)' = nf'f^{n-1} \ )
\end{array}$$

Si de plus g ne s'annule pas en a (resp. sur I), alors $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont définies au voisinage de a (resp. sur I) ; elles sont alors dérivables a (resp. sur I) et :

$$\begin{array}{ll}
\left(\dfrac{1}{g}\right)'(a) = -\dfrac{g'(a)}{(g(a))^2} & (\text{resp. } \left(\dfrac{1}{g}\right)' = -\dfrac{g'}{g^2} \ ) \\
\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2} & (\text{resp. } \left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2} \ )
\end{array}$$

✎ **Démonstration** 5

2.b Composée et réciproque

Proposition :

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$, où J est un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset J$ (de sorte que $g \circ f$ soit définie).
Si f est dérivable en a (respectivement sur I) et si g est dérivable en $f(a)$ (resp. sur J), alors $g \circ f$ est dérivable en a (resp. sur I) et :

Proposition :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue, strictement monotone. Notons $J = f(I)$; d'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de I sur J.

Soit $y \in J$. On suppose f dérivable en $f^{-1}(y)$ (souvent noté x).

$$\boxed{f^{-1} \text{ dérivable en } y \Longleftrightarrow f'\left(f^{-1}(y)\right) \neq 0}$$

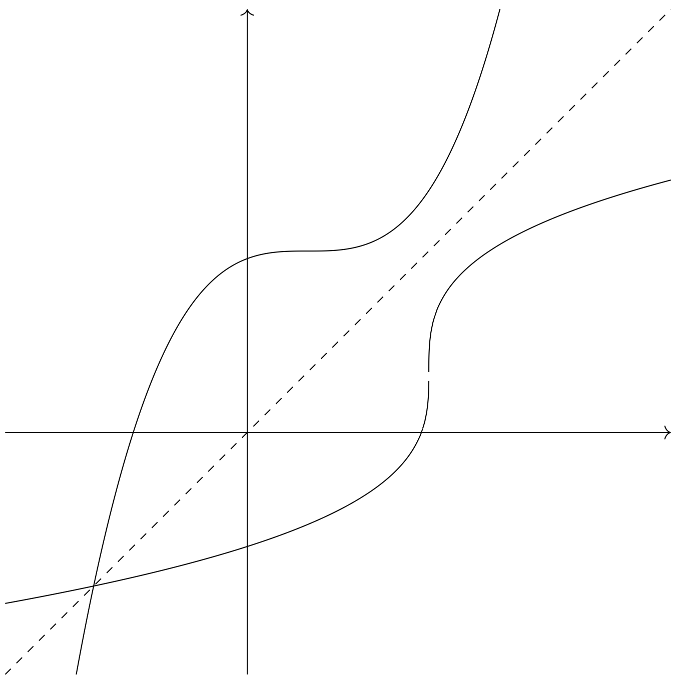
et dans ce cas, on a $\boxed{\left(f^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}}$

En particulier, si :

- f est dérivable sur I
- f' ne s'annule jamais sur I

alors la réciproque f^{-1} est dérivable sur J, et $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Illustration graphique



3 Dérivées d'ordre supérieur

3.a Définition

Définition :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

- On pose $f^{(0)} = f$, puis on définit par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ les dérivées successives de f, de la manière suivante :

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$$

si cette dérivée existe.
En particulier, pour que $f^{(n)}(a)$ soit défini, il faut au moins que $f^{(n-1)}$ soit défini sur un voisinage de a.

- Si $f^{(n)}$ est défini sur I, on dit que f est n fois dérivable sur I. La fonction $f^{(n)}$ s'appelle alors la dérivée n-ième de f.
- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$ est défini sur I, on dit que f est indéfiniment dérivable sur I.

Exemples à savoir refaire

- exp est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, et : $\forall\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ \exp^{(k)} =$
- cos est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, et : $\forall\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ \cos^{(k)} =$
- sin est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, et : $\forall\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ \sin^{(k)} =$
- $f : x \to x^n$ ($n \in \mathbb{N}$) est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, et :

  $\forall\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ f^{(k)} =$

- $f : x \to \dfrac{1}{x-a}$ ($a \in \mathbb{R}$)

Démonstration 6

Définition :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

- Pour $n \in \mathbb{N}$, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si f est n fois dérivable sur I et si $f^{(n)}$ est continue sur I.
- On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$.
  Cela revient à dire que f est indéfiniment dérivable sur I.

Notations : Pour $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I est noté $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$. L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I est noté $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$.

Remarques :

- Comme " dérivable implique continue", si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I avec $n \geq 1$ alors f est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur I. Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- f de classe $\mathcal{C}^0$ signifie que
- f de classe $\mathcal{C}^1$ signifie que
- f de classe $\mathcal{C}^2$ signifie que

- Si f est dérivable, alors f' de classe $\mathcal{C}^n \iff$

  On a alors $(f')^{(n)} =$

Exemples :

- Toutes les fonctions usuelles sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ là où elles sont dérivables.

- Soit $f : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \sin \frac{1}{x} \end{array}$

  Montrons que f se prolonge en 0 en une fonction dérivable mais pas de classe $\mathcal{C}^1$.

Démonstration 7

3.b Opérations

Proposition :

Soient f et g des fonctions de I dans $\mathbb{R}$.

• Si f et g sont n fois dérivables (respectivement de classe $\mathcal{C}^n$, respectivement de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur I, alors $f+g$, $\lambda.f$ (pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$), fg aussi et :

$$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$$

$$(\lambda.f)^{(n)} = \lambda.f^{(n)}$$

(Formule de Leibniz) $\quad (fg)^{(n)} =$

• Si de plus g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont définies sur I ; elles sont alors n fois dérivables (resp. de classe $\mathcal{C}^n$, resp. de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur I.

Par exemple $(fg)'' =$

Exercice : Justifier que $h : x \mapsto x^2 e^x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h^{(n)}$.

Démonstration 8

Proposition :

(Composition). Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$, où J est un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset J$ (de sorte que $g \circ f$ soit définie).
Si f est n fois dérivable (respectivement de classe $\mathcal{C}^n$, respectivement de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur I et si g est n fois dérivable (respectivement de classe $\mathcal{C}^n$, respectivement de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur J, alors $g \circ f$ est n fois dérivable (respectivement de classe $\mathcal{C}^n$, respectivement de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur I.

Proposition :

(Réciproque) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue, strictement monotone. Notons $J = f(I)$; d'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de I sur J.
On suppose que :

- f est n fois dérivable sur I
-

Alors la réciproque f^{-1} est n fois dérivable sur J.

On a le même théorème en remplaçant, pour la première hypothèse et pour la conclusion, "n fois dérivable" par "de classe $\mathcal{C}^n$", ou encore par "de classe $\mathcal{C}^\infty$".

Exemple : Arcsin.
✎ **Démonstration** 9

4 Théorèmes de Rolle et accroissements finis

4.a Extrema : définitions

Définition :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.
On dit que f admet en a :

- un maximum global si

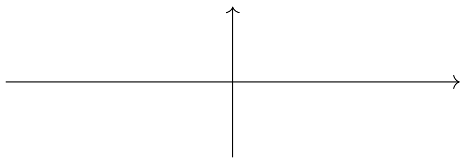
  On a alors $f(a) =$
- un maximum local si
- un minimum global si

  On a alors $f(a) =$
- un minimum local si

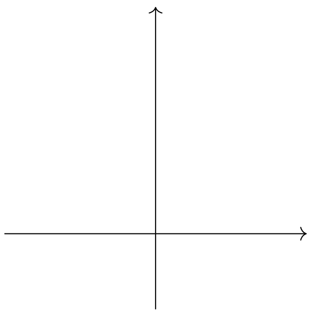
Par définition, un extremum est un minimum ou un maximum.

⚠ Un extremum global est un extremum local, mais la réciproque est fausse.

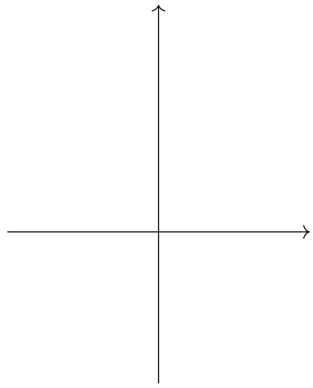
Exemples :



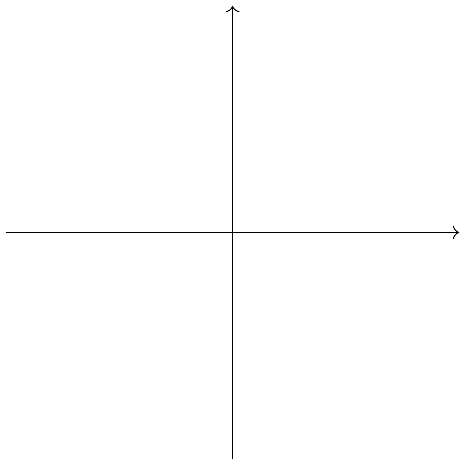
sin



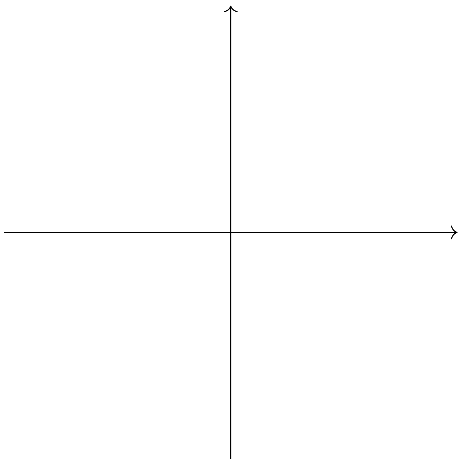
$x \mapsto x^2$



$x \mapsto x^3$



$x \mapsto x(x-1)(x-2)$



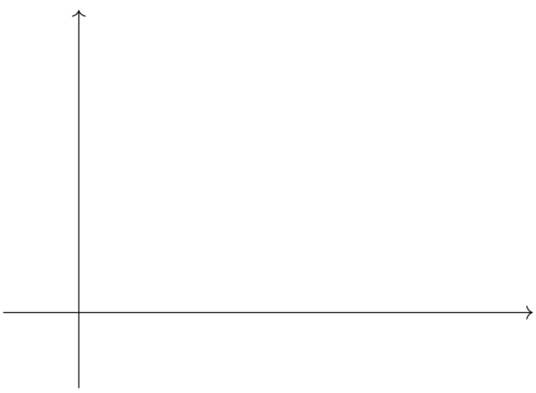
$x \mapsto -x(x-1)^3$

4.b Extremum local

Théorème :

> Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et a un point de I qui ne soit pas une extrémité de I (on dit parfois que a est "un point intérieur de I").
> On suppose f dérivable en a.
> Si f admet en a un extremum local alors

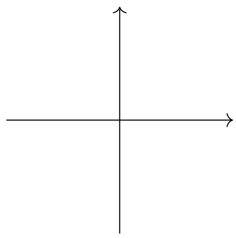
✎ **Démonstration** 10



⚠ Attentions aux déformations de ce théorème :

- Si a est une extrémité de I, alors ce n'est plus vrai :

- $\boxed{\text{La réciproque est fausse}}$:



$f'(a) = 0$ est donc une condition pour avoir un extremum local, non

Vocabulaire : Si $f'(a) = 0$, on dit que a est un point critique de f.

4.c Théorème de Rolle

Théorème :

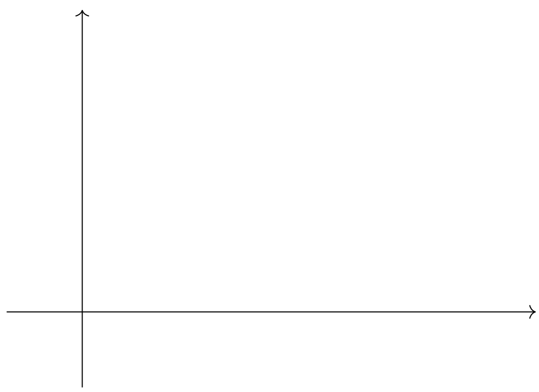
(Théorème de Rolle) Soient a et b des réels, $a < b$, et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ vérifiant les 3 hypothèses suivantes :

-
-
-

Alors

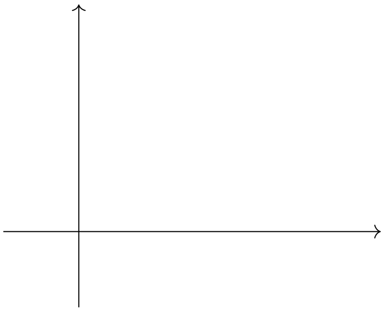
✎ **Démonstration** 11

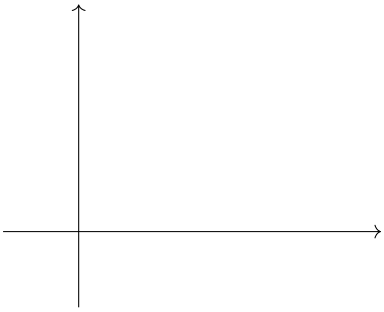
Interprétation graphique :

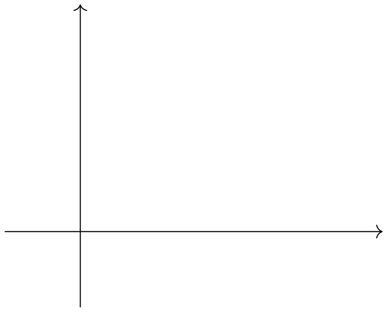


⚠ Il peut y avoir plusieurs c convenables :

Chacune des 3 hypothèses est essentielle ; donnons des contre-exemples quand seulement 2 des hypothèses sont vérifiées :







4.d Théorème des accroissements finis

Théorème :

(Théorème des Accroissements Finis) Soient a et b des réels, $a < b$, et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ vérifiant les 2 hypothèses suivantes :

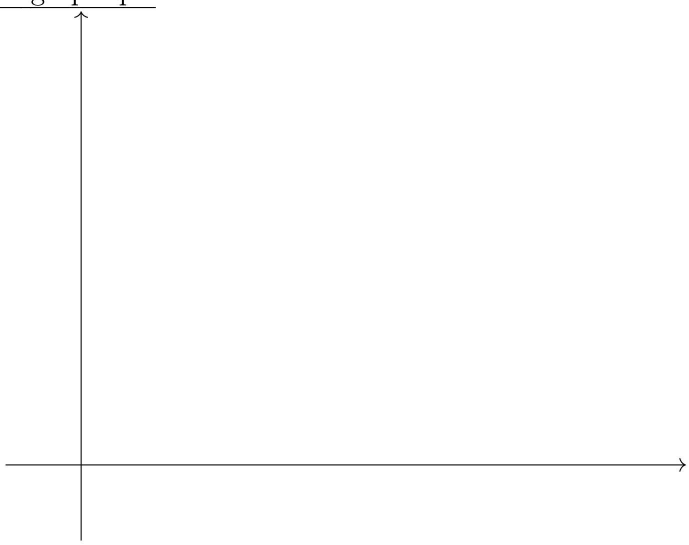
•

•

Alors

Démonstration 12

Interprétation graphique :



4.e Inégalité des accroissements finis

Théorème :

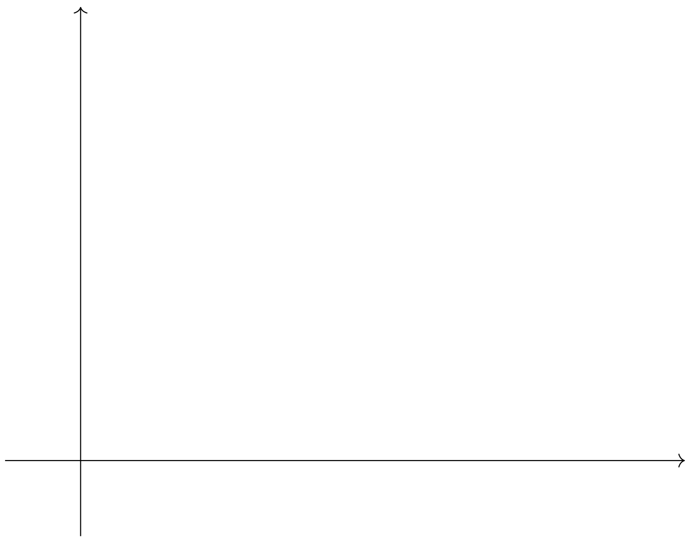
(Inégalité des Accroissements Finis) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ vérifiant les deux hypothèses suivantes :

-
-

Alors :

Démonstration 13

Illustration :



Vocabulaire :

Lorsqu'on a une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ et un réel k tels que $\forall\,(x, y) \in I^2$, $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$, on dit que f est lipschitzienne de rapport k, ou k-lipschitzienne. Si $k \in [0, 1[$, on dit aussi que f est k-contractante.

Exemple d'application : Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leq |x|$.

Démonstration 14

Utilisation très classique de l'IAF : pour les suites récurrentes avec fonction contractante

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \geq 2$ et : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.
On a vu au chapitre 8 que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I = [2, +\infty[$.
À l'aide de l'IAF, montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$.

Démonstration 15

5 Caractérisations des fonctions constantes et monotones parmi les fonctions dérivables sur un intervalle

5.a Caractérisation des fonctions constantes

Théorème :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ $\boxed{\text{dérivable}}$, sur I intervalle.

$$f \text{ constante sur } I \iff f' = 0$$

Démonstration 16

Exemple : Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} \end{array}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = 0$ (calcul). On en déduit qu'elle est constante sur chacun des intervalles $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. Autrement dit il existe deux constantes λ et μ telles que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \lambda \quad \text{et} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_-^*,\ f(x) = \mu$$

5.b Caractérisation des fonctions monotones

On donne les résultats pour la croissance et la stricte croissance : les résultats s'adaptent facilement pour la décroissance et la stricte décroissance.

Théorème :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ $\boxed{\text{dérivable}}$, sur I intervalle.

$$f \text{ croissante sur } I \iff f' \geq 0$$

Démonstration 17

⚠ Sur $\mathbb{R}^*$, qui n'est pas un intervalle, la dérivée de $x \mapsto \frac{1}{x}$ est toujours négative ;
pourtant cette fonction n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$...

Théorème :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ $\boxed{\text{dérivable}}$, sur I intervalle.

f est strictement croissante sur I si et seulement si $f' \geq 0$ sur I et si f' n'est identiquement nulle sur aucun segment $[a, b]$ inclus dans I.

Démonstration 18

En pratique, c'est souvent ce corollaire que l'on utilise ; il donne seulement des conditions suffisantes :

Corollaire :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ $\boxed{\text{dérivable}}$, sur I intervalle.
Si $f' > 0$ sur I, alors f est strictement croissante sur I.
Si $f' \geq 0$ sur I et si f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points, alors f est strict. croissante sur I.

6 Théorème de la limite de la dérivée

Théorème :

(de la limite de la dérivée) Soit $f : I \to \mathbb{R}$, et $a \in I$. On suppose :

-
-
-

Alors $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ tend aussi vers ℓ lorsque x tend vers a.

Démonstration 19

Méthode : En pratique, on va appliquer ce théorème (vérifier les hypothèses et écrire la conclusion), puis utiliser la conclusion :

- Lorsque $\ell \in \mathbb{R}$, on peut alors écrire :

  —

  —

  Souvent, on sait déjà que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$; on obtient donc que

- Lorsque $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$, on peut alors écrire :

Exemple 1 : Montrer que $f : \begin{array}{ccc} [0, \pi] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(\sqrt{x}) \end{array}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Démonstration 20

Exemple 2 : Montrer que $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \ln x \end{array}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

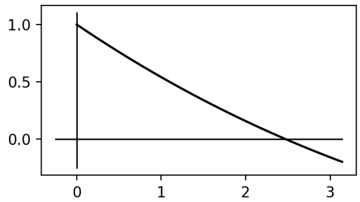
Démonstration 21

⚠ Il se peut que $\lim\limits_{x \to a} f'(x)$ n'existe pas ; on ne peut alors pas appliquer le théorème, mais ça ne signifie pas que sa conclusion est fausse !
Un exemple où $\lim\limits_{x \to a} f'(x)$ n'existe pas mais f dérivable en a : $x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{x}$ en 0.

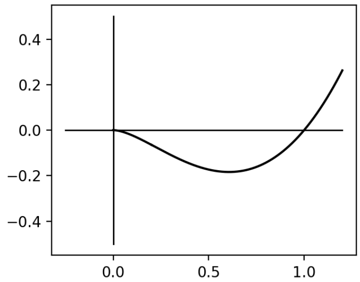
✎ **Démonstration** 22

Illustrations graphiques :

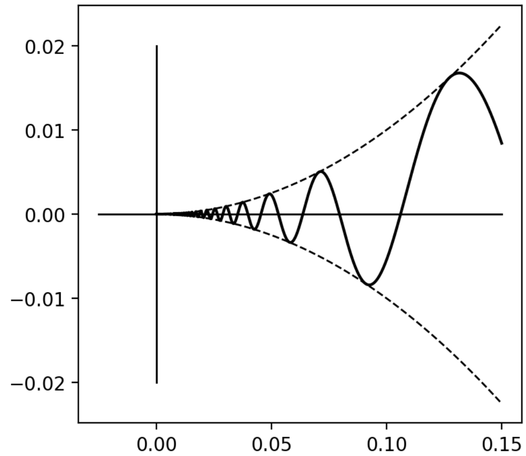
$f : x \mapsto \cos(\sqrt{x})$



$f : x \mapsto x^2 \ln(x)$



$f : x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{x}$



7 Brève extension aux fonctions à valeurs complexes

Toutes les définitions et propriétés des parties 1, 2, 3, sauf les interprétations graphiques et ce qui concerne la composition et la réciproque, se généralisent au cas d'une fonction $f : I \to \mathbb{C}$, avec I intervalle de $\mathbb{R}$.

Proposition :

(Caractérisation de la dérivabilité par les parties réelle et imaginaire)
Soit $f : I \to \mathbb{C}$ avec I intervalle de $\mathbb{R}$, et $a \in I$.
f est dérivable en a (respectivement sur I) ssi les fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont.
Dans ce cas, le nombre dérivé $f'(a)$ (respectivement la fonction dérivée f') vérifient :

$$f'(a) = (\mathrm{Re}(f))'(a) + i\,(\mathrm{Im}(f))'(a) \quad \text{(respectivement } f' = (\mathrm{Re}(f))' + i\,(\mathrm{Im}(f))' \text{)}$$

En revanche, certains grands théorèmes sur la dérivabilité ne se généralisent pas aux fonctions complexes : en particulier le théorème de Rolle et le théorème des accroissements finis.
Contre-exemple pour le théorème de Rolle : $f : \begin{array}{ccc} [0, 2\pi] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & e^{it} \end{array}$.

Les théorèmes parlant de croissance ou de décroissance de f n'ont pas de sens pour des fonctions complexes, mais les résultats suivants subsistent, $|.|$ désignant alors le module :

Théorème :

(Inégalité des Accroissements Finis) Soit $f\,:\,I \to \mathbb{C}$ vérifiant les deux hypothèses suivantes :

- f est dérivable sur $\boxed{\text{l'intervalle}}$ I
- $|f'|$ est majorée sur I par une constante k i.e. : $\forall\, x \in I,\ \ |f'(x)| \leq k$.

Alors : $\forall\,(x, y) \in I^2,\quad |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.

Théorème :

(Caractérisation des fonctions constantes)
Soit $f : I \to \mathbb{C}$ dérivable sur un intervalle I. f constante sur $I \iff f' = 0$

Théorème :

(de la limite de la dérivée) Soit $f\,:\,I \to \mathbb{C}$, et $a \in I$. On suppose que f est continue sur l'intervalle I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$, et que $f'(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$, avec $\ell \in \mathbb{C}$.
Alors $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ tend aussi vers ℓ lorsque x tend vers a.

Plan du cours