# Chapitre 10. Ensembles et applications.

## 1 Ensembles

### 1.a Définition d'un ensemble

Un ensemble $E$ est par définition une collection d'objets (en nombre fini ou infini). Ces objets sont appelés les éléments de $E$.
Si $x$ est un élément de $E$, on note : $x \in E$.
Représentations intuitive :

**Exemples** :

Il y a deux façons de définir un ensemble :

- en énumérant ses éléments.
  Par exemple $E_1 = \{2, 4, 6, 8\}$, $E_2 = \{n\pi \ / \ n \in \mathbb{Z}\}$
- en donnant une propriété qui caractérise les éléments de $E$ ;
  autrement dit on écrit $E = \{x \in ... \ / \ P(x)\}$.
  Par exemple $E_1 =$ et $E_2 =$

**Remarque** : Lorsqu'on résout une équation $(E)$, c'est en fait qu'on passe de la forme "propriété" à la forme "énumération" pour l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ :
Pour $(E)$ : $z^2 = -2$ d'inconnue le complexe $z$ :

$$\mathcal{S} =$$

Pour $(E)$ : $x + y = 0$ d'inconnue le couple $(x, y)$ :

$$\mathcal{S} =$$

Pour $(E)$ : $y' = y$ d'inconnue une fonction dérivable $y$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ :

$$\mathcal{S} =$$

Quelques ensembles particuliers :

- L'ensemble vide, noté $\emptyset$ : il ne contient aucun élément.
- Un ensemble avec un seul élément s'appelle un singleton : $\{x\}$.
  Un ensemble avec deux éléments s'appelle une paire : $\{x, y\}$ avec $x \neq y$.

### 1.b Inclusion

**Définition :**

Soient $E$ et $F$ des ensembles.
On dit que <u>$F$ est inclus dans $E$</u> ou que <u>$F$ est une partie de $E$</u> si :

$$\forall x \in F, \quad x \in E.$$

On note $F \subset E$.

**Exemples** :

**Remarques** :

- Si $F \subset E$ mais que $F \neq E$, on note parfois $F \subsetneq E$.

- $\emptyset$ est inclus dans l'importe quel ensemble $E$

- $F \not\subset E$ signifie donc : .

**Méthode** :

- Pour montrer que $F \subset E$, on écrit :

- Pour montrer que $E = F$ :
  $E = F$ signifie que $\boxed{x \in E \Longleftrightarrow x \in F}$.

  D'où deux possibilités :
  — Soit on arrive à montrer directement $x \in E \Longleftrightarrow \ldots \Longleftrightarrow x \in F$.
  Parfois facile, parfois difficile, parfois infaisable.
  — Soit on raisonne par double inclusion :

**Définition :**

L'ensemble des parties de $E$ est noté $\mathcal{P}(E)$.

Ainsi, si $E$ et $F$ sont des ensembles,

$\mathcal{P}(E)$ contient toujours $\emptyset$ et $E$.

**Exemple** : Pour $E = \{1, 2, 3\}$,

$$\mathcal{P}(E) = \{ \qquad \}$$

## 1.c Réunion, intersection, différence, complémentaire

Dans cette partie, $E$ désigne un ensemble et $A, B, C$ des parties de $E$.

**Définition :**

- Réunion de $A$ et $B$ : c'est l'ensemble des éléments de $E$ appartenant à $A$ $\boxed{\text{ou}}$ à $B$ :

  $A \cup B =$

- Intersection de $A$ et $B$ : c'est l'ensemble des éléments de $E$ appartenant à $A$ $\boxed{\text{et}}$ à $B$ :

  $A \cap B =$

Ces définitions se généralisent au cas de plus de 2 ensembles :
Si $I$ est un ensemble d'indices (fini ou infini) et si pour tout $i \in I$, $A_i$ est une partie de $E$, on définit :

$\bigcup_{i \in I} A_i =$

$\bigcap_{i \in I} A_i =$

**Exemples** :

— Le domaine de définition de tan est

— $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[1, 2 + \frac{1}{n}\right[ =$

**Proposition :**

- (Propriétés élémentaires)

$$A \cup A = \qquad A \cup E = \qquad A \cup \emptyset =$$
$$A \cap A = \qquad A \cap E = \qquad A \cap \emptyset =$$

- (Distributivité de $\cap$ sur $\cup$ et de $\cup$ sur $\cap$)

**Démonstration** 1

Généralisation : $A \cap \left( \bigcup_{i \in I} B_i \right) =$ $\qquad$ $A \cup \left( \bigcap_{i \in I} B_i \right) =$

**Définition :**

- Différence de $A$ par $B$ : c'est l'ensemble des éléments $x$ de $E$ appartenant à $A$ mais pas à $B$ :

$$A \backslash B =$$

- Complémentaire de $A$ dans $E$ : c'est l'ensemble des éléments $x$ de $E$ n'appartenant pas à $A$ ; autrement dit, c'est $E \backslash A$.
Souvent, il n'y a pas d'ambiguïté sur $E$, et le complémentaire de $A$ dans $E$ est alors noté $\overline{A}$ ou $A^c$.

$$\overline{A} =$$

**Exemple** : le domaine de définition de tan est

**Proposition :**

$$\overline{\emptyset} = \qquad A \cup \overline{A} = \qquad \overline{A \cup B} =$$

$$\overline{E} = \qquad A \cap \overline{A} = \qquad \overline{A \cap B} =$$

**Démonstration** 2

Généralisation : $\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} =$ $\qquad \overline{\bigcap_{i \in I} A_i} =$

### 1.d Parties disjointes, recouvrements disjoints, partitions

**Définition :**

On dit que deux parties $A$ et $B$ d'un ensemble $E$ sont disjointes si

**Exemples** :

Si $I$ est un ensemble d'indices et si pour tout $i \in I$, $A_i$ est une partie d'un ensemble $E$, on dit que les ensembles $A_i$ sont deux à deux disjoints si :

**Définition :**

Soit $(A_i)_{i \in I}$ des parties d'un ensemble $E$.
On dit que les $A_i$ forment un recouvrement disjoint de $E$
si les $A_i$ sont deux à deux disjoints, et si $\bigcup_{i \in I} A_i = E$.
Si de plus les $A_i$ sont tous non vides, on dit plutôt que les $A_i$ forment une partition de $E$.

**Exemples** :

- Avec $E = \mathbb{Z}$ :

- Avec $E = \mathbb{R}$ :

- Avec $E$ l'ensemble des prénoms des élèves de la PTSI2 :

### 1.e Produit cartésien

**Définition :**

Soient $E$ et $F$ des ensembles. On appelle produit cartésien de $E$ et $F$ l'ensemble des couples d'un élément de $E$ et d'un élément de $F$ :

$$E \times F =$$

Une égalité entre deux éléments de $E \times F$ revient à une égalité dans $E$ et une égalité dans $F$ : $(x, y) = (x', y') \Longleftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$

⚠ L'ordre compte ! $(0, 1) \neq (1, 0)$.
⚠ Ne pas confondre avec $\{x, y\}$ qui désigne un ensemble.
Par exemple, $\{x, y\}$ est réduit à $\{x\}$ si $x = y$, alors que $(x, x)$ a un sens différent de $x$.

**Illustration** :

Cette définition se généralise à un nombre fini quelconque d'ensembles :

$$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n =$$

En particulier, $E \times E \times \cdots \times E$ (où $E$ apparaît $n$ fois) est noté $E^n$.

**Exemples** :

# 2 Applications : quelques notions générales

## 2.a Définition

**Définition :**

On appelle <u>application</u> (ou <u>fonction</u>) la donnée de trois choses :

- Un ensemble de départ $E$ non vide
- Un ensemble d'arrivée $F$ non vide
- Pour tout $x \in E$, la donnée d'un <u>unique</u> élément $f(x)$ de $F$ associé, noté $f(x)$.

Notations :

$$\begin{array}{rccc} f : & E & \to & F \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array} \qquad \text{ou} \qquad f : E \to F \qquad \text{ou} \qquad E \xrightarrow{f} F.$$

On dit que $f$ est une application :

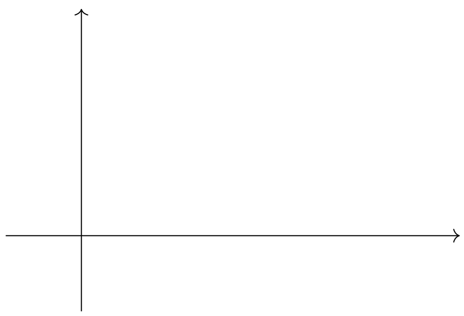
"de $E$ dans $F$" ou bien " de $E$ sur $F$" ou bien "définie sur $E$ à valeurs dans $F$"

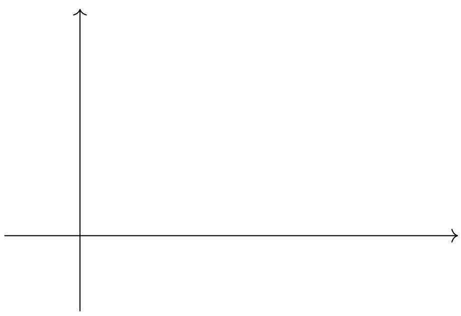
L'ensemble des applications de $E$ dans $F$ est noté $\boxed{F^E \text{ ou } \mathcal{F}(E,F)}$ .

**Vocabulaire** :

- Si $x \in E$, $f(x)$ est <u>l'image de $x$ par $f$</u>.
- Si $y \in F$, tout élément $x \in E$ qui vérifie $f(x) = y$ s'appelle <u>un antécédent de $y$ par $f$</u>.
  Il peut y avoir plusieurs antécédents pour un même $y$ !
- Le <u>graphe de f</u> est .
  Lorsque $E \subset \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}$, c'est une partie de $\mathbb{R}^2$ que l'on appelle courbe représentative de $f$.

**Exemples** :



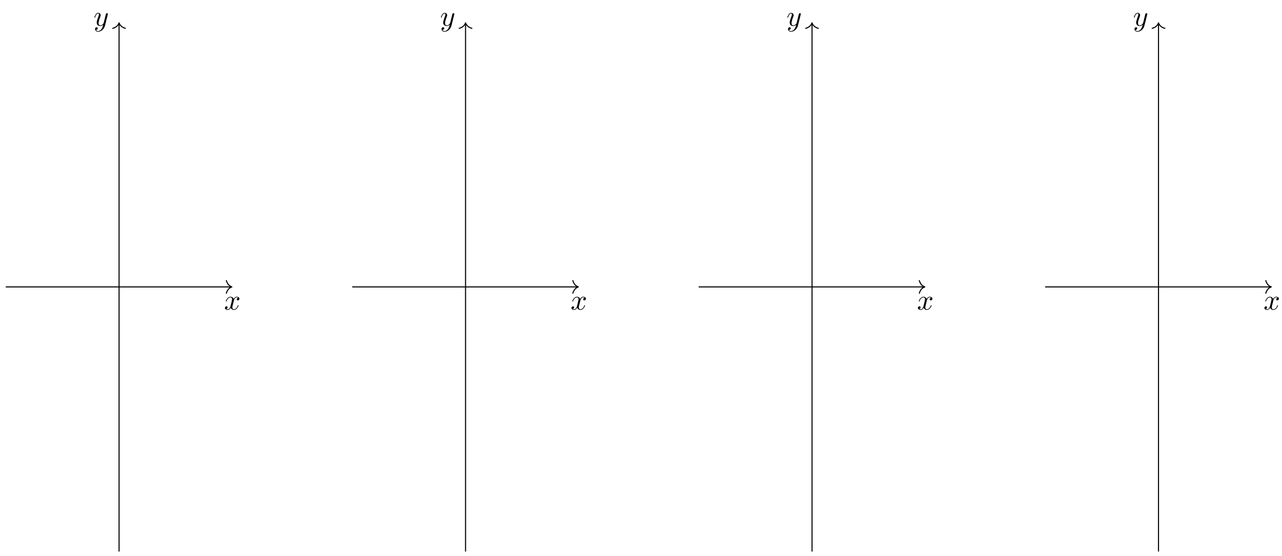


$$\begin{array}{rccc} \mathrm{id}_E : & E & \to & E \\ & x & \mapsto & x \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} f : & E & \to & F \\ & \text{élève} & \mapsto & \text{prénom} \end{array}$$ où $E =$ PTSI2 et $F =$ ensemble des prénoms écrits dans notre alphabet.

$$\begin{array}{rccc} f_1 : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}, \quad \begin{array}{rccc} f_2 : & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}, \quad \begin{array}{rccc} f_3 : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}, \quad \begin{array}{rccc} f_4 : & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

sont 4 applications distinctes.




Montrer l'égalité de deux applications $f : E \to F$ et $g : E' \to F'$, c'est donc :

- Vérifier que $E = E'$ (mêmes ensembles de départ)
- Vérifier que $F = F'$ (mêmes ensembles d'arrivée)
- Montrer que pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$.

### 2.b Composition

**Définition :**

Soient $E, F, G$ des ensembles, et des applications $E \xrightarrow{f} F$ et $F \xrightarrow{g} G$.
On appelle composée de $f$ par $g$ l'application notée $g \circ f$ définie par :

Illustration :

**Proposition :**

(Associativité) Soient $E, F, G, H$ des ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$, $h : G \to H$. Alors :

On peut donc écrire

⚠ Il n'y a pas de commutativité en général ! !
Des contre-exemples :

**Proposition :**

Soit $f : E \to F$.

$$f \circ \quad = f \qquad \circ f = f$$

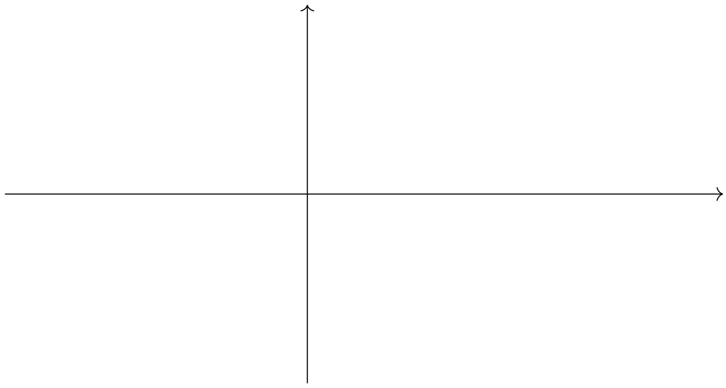
✎ **Démonstration** 3

### 2.c Restriction, prolongements

**Définition :**

Soit $f : E \to F$ et $A$ une partie de $E$.
On appelle <u>restriction de $f$ à $A$</u> l'application $f|_A$ définie par :

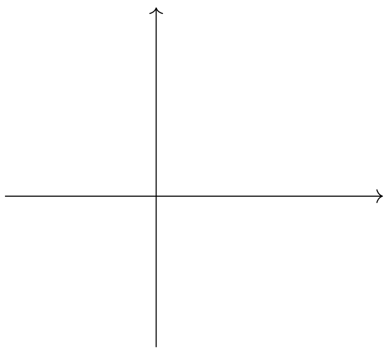
Ce sont bien deux applications distinctes :
elles n'ont pas le même graphe !
Exemple : cos et $\cos|_{[0,\pi]}$ :

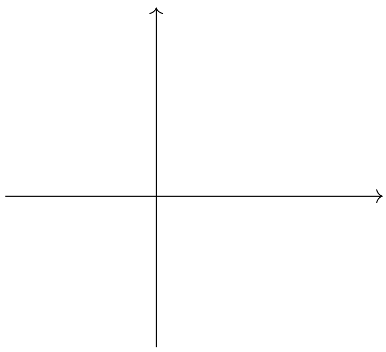


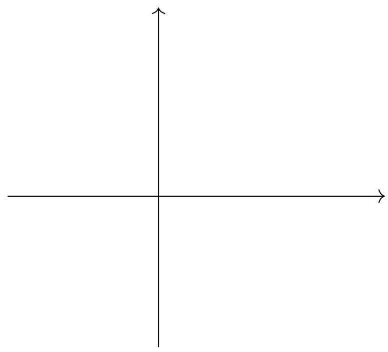
**Définition :**

Soit $A$ une partie de $E$ et $f : A \to F$.
<u>Un prolongement de $f$ à $E$</u> est une application $\tilde{f} : E \to F$ qui vérifie :

⚠ Il n'y a pas un seul prolongement possible mais une infinité !







### 2.d Images directes, images réciproques

**Définition :**

Soit $f : E \to F$ et $A$ une partie de $E$.
On appelle <u>image directe de $A$ par $f$</u>, et on note $f(A)$, l'ensemble des images des éléments de $A$ :

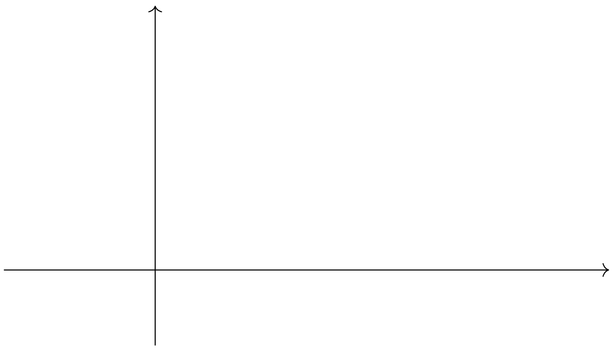
$$f(A) = \{f(x)/\ x \in A\}$$

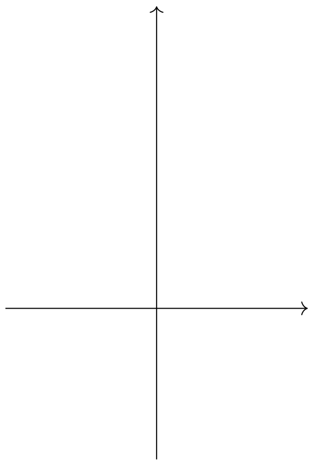
C'est une partie de $F$.

Cela revient à dire, pour $y \in F$ :

$$y \in f(A) \Longleftrightarrow$$

C'est ce qu'il faut retenir en priorité !





**Exemple** : Pour $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$

$f([0,2]) =$
$f(\mathbb{R}) =$
$f([-1,2]) =$

**Exemple** : Lorsque $f : I \to \mathbb{R}$ est continue et strictement croissante avec $I$ intervalle, on a déjà vu comment obtenir $f(I)$ :

si $I = [a,b]$, c'est $[f(a), f(b)]$ ; si $I = ]a,b]$, c'est $]\lim\limits_{x\to a} f(x), f(b)]$

si $I = [a,b[$, c'est $[f(a), \lim\limits_{x\to b} f(x)[$ ; si $I = ]a,b[$, c'est $]\lim\limits_{x\to a} f(x), \lim\limits_{x\to b} f(x)[$

Dans le cas où $f$ est strictement décroissante, il suffit d'inverser les bornes.

**Définition :**

Soit $f : E \to F$ et $B$ une partie de $F$.
On appelle image réciproque de $B$ par $f$, et on note *provisoirement* $f^{\leftarrow}(B)$, l'ensemble des antécédents des éléments de $B$ :

$$f^{\leftarrow}(B) = \{x \in E / \ f(x) \in B\}$$

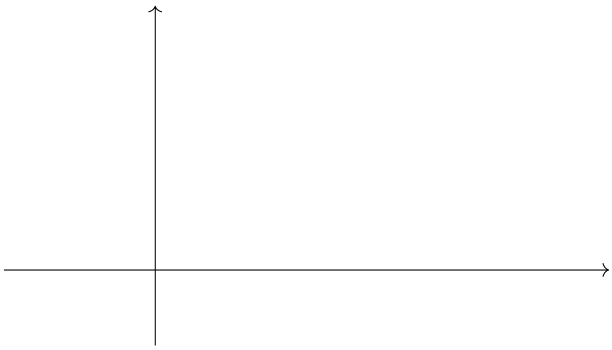
C'est une partie de $E$.

Cela revient à dire, pour $x \in E$ :

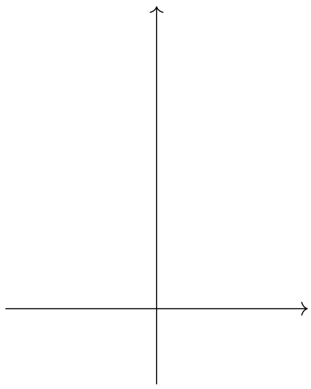
$$x \in f^{\leftarrow}(B) \Longleftrightarrow$$

C'est ce qu'il faut retenir en priorité !

La notation officielle sera $f^{-1}(B)$, on en reparlera dans la partie 3.



**Exemple** : Pour $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$



$f^{\leftarrow}([0,4]) =$
$f^{\leftarrow}(]-\infty,-1]) =$
$f^{\leftarrow}(\{3\}) =$
$f^{\leftarrow}([-3,1]) =$

**Remarque** : Soit $y \in F$ ; $f^{\leftarrow}(\{y\})$ est

Désormais, en particulier dans les exercices, on se force à utiliser la notation $f^{-1}(B)$ au lieu de $f^{\leftarrow}(B)$.

# 3 Injectivité, surjectivité et bijectivité

## 3.a Injectivité

**Définition :**

On dit que $f : E \to F$ est <u>injective</u> (ou : est une injection) si

Autrement dit :

$$f \text{ injective} \iff$$
$$\iff$$

**Illustration** :

**Méthodes** :

- C'est la dernière équivalence qu'on utilise le plus souvent.
- Prouver que $f$ n'est pas injective, c'est

**Exemples** :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{C}\backslash\{i\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{z+i}{z-i} \end{array}$$

**Traduction en termes d'équations** :

$f$ injective $\iff$ Pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ (d'inconnue $x \in E$) a

### 3.b Surjectivité

**Définition :**

On dit que $f : E \to F$ est surjective (ou : est une surjection) si

Autrement dit :

$$f \text{ surjective} \iff$$

**Remarque** : Dire que $f : E \to F$ est surjective, c'est dire que $f(E) = F$.

**Illustration** :

**Traduction en termes d'équations** :

$f$ surjective $\iff$ Pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ (d'inconnue $x \in E$) a

**Méthode** :
Prouver que $f$ n'est pas surjective, c'est

**Exemples** :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & \big(\ln(x^2), y + 2\big) \end{array}$$

### 3.c Bijectivité, réciproque

**Définition :**

On dit que $f : E \to F$ est bijective (ou : est une bijection) si elle est injective et surjective, c'est-à-dire si

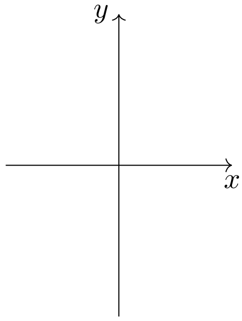
Autrement dit :

$f$ bijective $\iff$

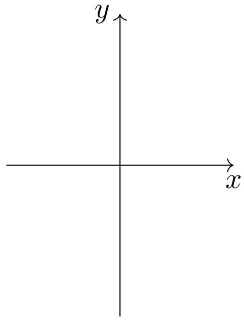
**Illustration** :

**Exemples** : Récapitulons avec :

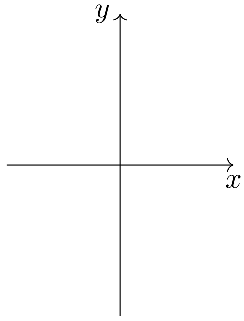
$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$



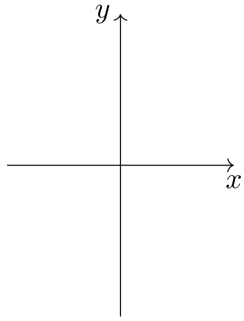

$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$




$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$




$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$




**Traduction en termes d'équations**

$f$ bijective $\iff$ Pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ (d'inconnue $x \in E$) a

**Exemples** :

- Pour tout ensemble $E$, $\mathrm{id}_E$ est bijective.
- Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (y, x+2) \end{array}$

- Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}\backslash\{3\} & \to & \mathbb{R}\backslash\{1\} \\ x & \mapsto & \dfrac{x+1}{x-3}. \end{array}$ Montrer que $f$ est bijective.

  **Démonstration** 4

  Si l'exercice avait été :
  Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}\backslash\{3\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x+1}{x-3}. \end{array}$ $f$ est-elle bijective ?

  **Démonstration** 5

**Définition :**

Soit $f$ une application bijective de $E$ dans $F$.
L'application qui à tout $y \in F$, associe son unique antécédent par $f$, s'appelle l'application réciproque de $f$. On la note $f^{-1}$.
On a donc :

**Illustration** :

**Remarques :**

- Si $f : E \to F$ est bijective alors $f^{-1}$ est bijective et $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.
- Par définition, pour tout $x \in E$, $f^{-1}\left(f(x)\right) = x$, et pour tout $y \in F$, $f\left(f^{-1}(y)\right) = y$. Ainsi :

**Exemples :**

Pour tout ensemble $E$, l'application réciproque de $\mathrm{id}_E$ est

L'application réciproque de $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ est

L'application réciproque de $\begin{array}{ccc} [0, \pi] & \to & [-1, 1] \\ x & \mapsto & \cos x \end{array}$ est

D'après ce qui précède, l'application réciproque de $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (y, x+2) \end{array}$ est

D'après ce qui précède, l'application réciproque de $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\backslash\{3\} & \to & \mathbb{R}\backslash\{1\} \\ x & \mapsto & \dfrac{x+1}{x-3} \end{array}$ est

> **Retenir** :
>
> Pour montrer qu'une fonction est bijective et trouver la réciproque, une bonne méthode est de résoudre, pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$.
>
> Si <u>pour tout $y \in F$</u>, on trouve une <u>unique solution</u>, alors on peut affirmer que $f$ est bijective...
> <u>et l'unique solution obtenue, qui s'exprime en fonction de $y$, est $f^{-1}(y)$</u> !
>
> Si vous trouvez ne serait-ce qu'une valeur de $y$ pour laquelle on n'a pas de solution ou plusieurs solutions, alors $f$ n'est pas bijective.

**Notation pour l'image réciproque**

Soit $f : E \to F$ une fonction bijective, notons $g = f^{-1}$, on a $g : F \to E$. Soit $B$ une partie de $F$.

- On peut considérer l'image directe de $B$ par $g$, c'est $g(B) = f^{-1}(B)$, l'ensemble des images par $f^{-1}$ des éléments de $B$.
- Comme $B$ est une partie de l'ensemble d'arrivée de $f$, on peut aussi considérer l'image réciproque de $B$ par $f$, notée $f^{-1}(B)$ (ou, avec la notation provisoire, $f^{\leftarrow}(B)$) : c'est l'ensemble des antécédents par $f$ des éléments de $B$. Or, pour $y \in B$, l'antécédent de $y$ par $f$ est $f^{-1}(y)$, c'est bien une image d'un élément $y$ de $B$ par la fonction $f^{-1}$.
- Conclusion : la notation $f^{-1}(B)$ n'est pas ambigüe lorsque $f$ est bijective, cela désigne indifféremment l'image réciproque de $B$ par $f$ ou l'image directe de $B$ par $f^{-1}$.

⚠ La notation $f^{-1}(B)$ existe même si $f$ n'est pas bijective !

### 3.d Liens avec la composition

On a vu que si $f : E \to F$ est bijective, alors $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F$. Il y a une réciproque :

**Théorème :**

(Caractérisation des fonctions bijectives)
Soit $f : E \to F$.
L'application $f$ est bijective si et seulement s'il existe une application $g : F \to E$ telle que

Si c'est le cas, une telle application $g$ est unique, c'est $f^{-1}$.

**Démonstration** 6

Cela donne une bonne méthode dans les exercices abstraits pour montrer qu'une fonction est bijective : trouver une application $g : F \to E$ telle que $\begin{cases} g \circ f = \mathrm{id}_E \\ f \circ g = \mathrm{id}_F. \end{cases}$
On peut alors affirmer que $f$ est bijective et que $f^{-1} = g$ (dans cet ordre).

**Proposition :**

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$.
Si $f$ et $g$ sont bijectives, alors :

- la fonction $g \circ f : E \to G$ est bijective
- et sa réciproque est :

**Démonstration** 7

**Illustration** :

**Proposition :**

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

- Si $f$ et $g$ sont injectives, alors $g \circ f$ aussi.
- Si $f$ et $g$ sont surjectives, alors $g \circ f$ aussi.

**Démonstration** 8

# 4 Quelques notions de plus au programme

## 4.a Fonction indicatrice

**Définition :**

Soit $E$ un ensemble et $A$ une partie de $E$.
La fonction indicatrice de $A$ (ou fonction caractéristique de $A$) est la fonction de $E$ dans $\{0,1\}$ notée $\mathbb{1}_A$ et définie par :

$$\mathbb{1}_A : \begin{array}{rcl} E & \to & \{0,1\} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

Ainsi, pour tout $x \in E$ : $x \in A \iff \mathbb{1}_A(x) = 1$ et $x \notin A \iff \mathbb{1}_A(x) = 0$.

Connaître $\mathbb{1}_A$, c'est connaître exactement pour quels $x \in E$ on a $\mathbb{1}_A(x) = 1$ et pour quels $x \in E$ on a $\mathbb{1}_A(x) = 0$ ; autrement dit, cela revient à connaître exactement quels sont les éléments de $E$ qui constituent la partie $A$. On peut dire que la partie $A$ est caractérisée par sa fonction indicatrice.

Si $A$ et $B$ sont des parties de $E$, $A = B \iff \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$.

L'application $A \mapsto \mathbb{1}_A$ est une bijection de

## 4.b Familles indexées

Si $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ sont des éléments d'un ensemble $E$, $(x_i)_{i\in\{1,2,\dots,n\}}$ désigne la famille $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ d'éléments de $E$. On peut en fait voir cela comme une application de l'ensemble des indices vers $E$ :

$$x : \begin{array}{rcl} \{1,2,\dots,n\} & \to & E \\ i & \mapsto & x(i) = x_i \end{array}$$

Par exemple une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est en fait une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, d'où la notation pour l'ensemble des suites réelles : $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Plus généralement, si $I$ et $E$ sont des ensembles, une famille d'éléments de $E$ indexée par $I$ est en fait une application de $I$ dans $E$ :

$$x : \begin{array}{rcl} I & \to & E \\ i & \mapsto & x(i) \end{array}$$

On note cette famille $\boxed{(x_i)_{i\in I}.}$

**Exemple** :
On pose, pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, $f_a : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(|a|x). \end{array}$

Alors $(f_a)_{a\in\mathbb{R}^*}$ est une famille de fonctions de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, indexée par $\mathbb{R}^*$.

## Plan du cours