Chapitre 9. Introduction aux développements limités.

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Négligeabilité : cas des suites

Exemple introductif : on définit la suite (u_n) par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = 2\sqrt{n} + \frac{1}{n}.$$

On est tenté de dire que le terme $\frac{1}{n}$ est "négligeable"...
Dans cette partie, on considère des suites u, v, w, t à valeurs dans $\mathbb{K}$.

1.a Definition

Définition :

On suppose que la suite v ne s'annule pas à partir d'un certain rang :

On dit que u est négligeable devant v si :

Notation : $\boxed{u_n = o(v_n)}$ ou $u_n = o_{+\infty}(v_n)$ ou $u_n = o_{n\to+\infty}(v_n)$ ou $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)}$.

Remarque : Il y a une définition équivalente, qui permet d'éviter de supposer que (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \Longleftrightarrow \exists\,(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \text{ telle que } \varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \text{ vérifiant : } \exists N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geq N, u_n = \varepsilon_n v_n.$$

Exemples :

$n^2 \underset{n\to+\infty}{=}$ $\qquad\qquad \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$

De manière générale, si $\qquad\qquad$ alors $n^p \underset{n\to+\infty}{=} o(n^q)$

$\frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=}$ $\qquad\qquad \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=}$

De manière générale, pour p et q réels, si $\qquad\qquad$ alors $\frac{1}{n^p} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^q}\right)$

Remarque :
Les petits o sont la formalisation d'une idée intuitive : certains infinis sont "plus infinis" que d'autres. Certains zéros sont "plus zéros" que d'autres. Dire que $n^2 \underset{n\to+\infty}{=} o(n^4)$ c'est affirmer l'immensité de n^4 par rapport à n^2 lorsque n est grand.

1.b Exemples à connaître

Proposition :

- $\forall \alpha > 0, \quad \forall \beta \in \mathbb{R}, \quad (\ln n)^\beta \underset{n\to+\infty}{=} o(n^\alpha)$.
- $\forall \alpha > 0, \quad \forall \beta \in \mathbb{R}, \quad n^\beta \underset{n\to+\infty}{=} o(e^{\alpha n})$.
- $\forall \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall a > 1, \quad n^\beta \underset{n\to+\infty}{=} o(a^n)$.
- $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad |a| < |b| \implies a^n \underset{n\to+\infty}{=} o(b^n)$.
- $\forall a \in \mathbb{R}, \quad a^n \underset{n\to+\infty}{=} o(n!)$.
- $n! \underset{n\to+\infty}{=} o(n^n)$.

✎ **Démonstration** 1

1.c Propriétés de base

Proposition :

- Pour $\lambda \neq 0$: si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(\lambda v_n)$.
- Somme :
  Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$ et si $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$ alors $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$.
- Produit :
  Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ alors $t_n u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(t_n v_n)$.

  Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et $t_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$ alors $u_n t_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n w_n)$.
- Transitivité :
  Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et si $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$.

✎ **Démonstration** 2

Proposition :

$u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$ signifie que

✎ **Démonstration** 3

⚠ Si vous trouvez $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(0)$, vous avez très certainement fait une erreur. En effet, cela signifierait :

Une propriété assez intuitive et très utile :

Proposition :

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ avec $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ aussi.

Egalités plus longues avec des o

On rencontre souvent les o dans des exemples de la forme : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n + o(w_n)$

Ceci signifie :

Par exemple, si $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et $\beta_n \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ alors on ne peut pas en déduire : $\alpha_n = \beta_n$ pour tout n (ni même à partir d'un certain rang !)

En effet, les relations précédentes signifient respectivement :

$$\alpha_n = \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon_n}{n} \text{ avec } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0 \qquad \beta_n = \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon'_n}{n} \text{ avec } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon'_n = 0$$

Les deux suites (ε_n) et (ε'_n) n'ont rien à voir a priori.

Ainsi, une écriture du type $u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n + o(w_n)$ n'est pas une égalité au sens habituel mais donne plutôt une information sur la suite (u_n).

Simplifications de o

Lorsqu'on écrit : $o(u_n) + o(v_n)$

cela désigne

Les règles sur la somme et le produit peuvent donc se réécrire en "abrégé" de la manière suivante :

Concrètement, il faut savoir appliquer ces règles sur des exemples comme les suivants :

1°) $o\left(\dfrac{1}{n^2}\right) + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

2°) $o\left(\dfrac{1}{n^2}\right) - o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

3°) $o\left(\dfrac{1}{n}\right) + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

4°) $o\left(\dfrac{1}{n^p}\right) + o\left(\dfrac{1}{n^q}\right)$ avec $p < q$

5°) $o\left(\dfrac{5}{n}\right)$

6°) $n \times o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

7°) $o\left(\dfrac{1}{n}\right) \times o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$

8°) $u_n \underset{n\to+\infty}{=} (n-1)\left(1+n+\dfrac{7}{n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$

Définition :

> Lorsque $u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n + o(v_n)$, on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, et on dit que u est équivalente à v.

Cela revient à $\boxed{\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1}$:

Cette notion d'équivalence sera étudiée de façon approfondie plus tard ; pour l'instant, elle va nous servir par exemple à simplifier certains o :

Proposition :

> Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et si $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} t_n$, alors $u_n = o(t_n)$.

Démonstration 4

Autrement dit, un $o\left(v_n + o(v_n)\right)$ est un $o(v_n)$.

Exemple : Simplifier $o\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)$

La notion d'équivalence est très utile pour les questions de limites et de signe :

Proposition :

> On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n + o(v_n)$, autrement dit que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$:
> - Si (v_n) admet une limite (finie ou infinie) alors (u_n) admet la même limite.
> - Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 0$ alors $\exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geq N,\ u_n \neq 0$
> - Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$ alors $\exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geq N,\ u_n > 0$

Démonstration 5

2 Négligeabilité : cas des fonctions

2.a Définition et exemples

Les définitions et propriétés de o pour les fonctions seront les mêmes que pour les suites.
Une différence : pour les suites, n ne peut tendre que vers $+\infty$, alors qu'ici on se place en un point a qui peut être fini ou $\pm\infty$.
Dans la suite, sauf mention contraire, on considérera des fonctions (f, g, h...) définies sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$, et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ un point ou une extrémité de I.

Définition :

On dit que f vérifie la propriété $\mathcal{P}$ au voisinage de a si :

cas $a \in \mathbb{R}$:

cas $a = +\infty$:

cas $a = -\infty$:

Définition :

On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a sauf peut-être en a.

On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a si $\boxed{\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0}$.

Notation : $f = o_a(g)$, ou $f(x) = o_{x \to a}(g(x))$, ou $\boxed{f(x) \underset{x \to a}{=} o\big(g(x)\big)}$.

Remarque : Une définition équivalente, qui permet d'éviter de supposer que g ne s'annule pas au voisinage de a : $f(x) \underset{x \to a}{=} o\big(g(x)\big)$

$\iff$ il existe une fonction ε telle que $f(x) = \varepsilon(x) g(x)$ au voisinage de a et $\varepsilon(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$

Exemple : Comparer x et x^2 en 0 et en $+\infty$:

Proposition :

$\forall\, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\alpha < \beta$:

Proposition : Relations de négligeabilité en $+\infty$

- $\forall \alpha > 0,\ \ \forall \beta \in \mathbb{R},\quad (\ln x)^\beta \underset{x \to +\infty}{=} o(x^\alpha)$ et $x^\beta \underset{x \to +\infty}{=} o(e^{\alpha x})$
- $\forall \beta \in \mathbb{R},\ \ \forall a > 1,\quad x^\beta \underset{x \to +\infty}{=} o(a^x)$

2.b Propriétés

Proposition :

- Multiplication par un scalaire :
  Si $\lambda \neq 0$ et si $f(x) \underset{x\to a}{=} o\big(g(x)\big)$ alors $f(x) \underset{x\to a}{=} o\big(\lambda g(x)\big)$
- Somme :
  Si $f(x) \underset{x\to a}{=} o\big(h(x)\big)$ et si $g(x) \underset{x\to a}{=} o\big(h(x)\big)$ alors $f(x)+g(x) \underset{x\to a}{=} o\big(h(x)\big)$
- Produit :
  Si $f(x) \underset{x\to a}{=} o\big(g(x)\big)$ alors $h(x)f(x) \underset{x\to a}{=} o\big(h(x)g(x)\big)$.

  Si $f(x) \underset{x\to a}{=} o\big(g(x)\big)$ et $u(x) \underset{x\to a}{=} o\big(v(x)\big)$ alors $f(x)u(x) \underset{x\to a}{=} o\big(g(x)v(x)\big)$.
- Transitivité :
  Si $f(x) \underset{x\to a}{=} o\big(g(x)\big)$ et si $g(x) \underset{x\to a}{=} o\big(h(x)\big)$ alors $f(x) \underset{x\to a}{=} o\big(h(x)\big)$

Proposition :

- $f(x) \underset{x\to a}{=} o(1) \Longleftrightarrow f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.
- Si $f(x) \underset{x\to a}{=} o\big(g(x)\big)$ et si $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$ alors $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$ aussi.

⚠ $f(x) \underset{x\to a}{=} o(0)$ signifie que f est nulle au voisinage de a (rarissime, vérifier ses calculs...)

Exemples :

1°) Montrer que : $e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + o(x)$

2°) Simplifier :

$o(x^2) + o(x^2) \underset{x\to 0}{=}$

$o(x^2) - o(x^2) \underset{x\to +\infty}{=}$

$o(x) + o(x^2) \underset{x\to 0}{=}$

$o(x) + o(x^2) \underset{x\to +\infty}{=}$

$o(x^p) + o(x^q) \underset{x\to 0}{=}$ avec $p < q$

$o(x^p) + o(x^q) \underset{x\to +\infty}{=}$ avec $p < q$

$o(5x) \underset{x\to 0}{=}$

$o(x) - o(x^2) + o(\ln x) - o(\exp x) \underset{x\to +\infty}{=}$

3°) On suppose que : $\begin{cases} f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 + o(x^2) \\ g(x) \underset{x\to 0}{=} 2x - 5x^2 + x^3 + o(x^3) \end{cases}$. Que dire de $f(x)+g(x)$, de $f(x)\times g(x)$?

✎ **Démonstration** 6

Définition :

> Si $f(x) \underset{x\to a}{=} g(x) + o\left(g(x)\right)$, on note $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et on dit que f est équivalente à g au voisinage de a.

Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, alors un $o\left(f(x)\right)$ est un $o\left(g(x)\right)$; simplifions par exemple :

$o\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \ln x\right) \underset{x\to+\infty}{=}$

$o(x+x^2) \underset{x\to 0}{=}$

$o(x+x^2) \underset{x\to+\infty}{=}$

Proposition :

> On suppose que $f(x) \underset{x\to a}{=} g(x) + o\left(g(x)\right)$, autrement dit que $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.
> - Si g admet une limite (finie ou infinie) en a alors f admet la même limite en a.
> - Si, pour tout $x \in I, g(x) \neq 0$ alors, au voisinage de a, $f(x) \neq 0$.
> - Si, pour tout $x \in I, g(x) > 0$ alors, au voisinage de a, $f(x) > 0$.

2.c Qualité d'une approximation

Une approximation n'a de sens que si l'on peut mesurer l'erreur commise.

Si l'on nous dit que : « π est égal à $3,141592$ à 10^{-2} près »
on répondra qu'il suffit de dire que « π égal à $3,14$ à 10^{-2} près »

En effet, raisonner à 10^{-2} près, c'est négliger tout ce qui est plus petit que 10^{-2}.
Dire « à 10^{-2} près », c'est dire que l'erreur commise est comprise entre -10^{-2} et $+10^{-2}$.
Ainsi, la phrase : « $\pi \approx 3,14$ à 10^{-2} près » est aussi précise que la phrase « $\pi \approx 3,141592$ à 10^{-2} ».

C'est pareil avec les o. Partons de l'écriture suivante :

$$e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + o(x)$$

Cette écriture affirme que $1+x+x^2$ est une approximation de e^x au voisinage de 0 avec un $o(x)$ comme erreur commise. Le $o(x)$ représente le niveau de précision de l'approximation effectuée.
Comme $x^2 \underset{x\to 0}{=} o(x)$, la quantité x^2 est inutile. Nous pouvons écrire :

$$e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + o(x)$$

et cette nouvelle écriture est aussi précise que la précédente. Et surtout elle est plus lisible et économe !

Il est très important pour la suite que vous soyez conscient des termes qui sont inutiles dans une écriture avec des o.

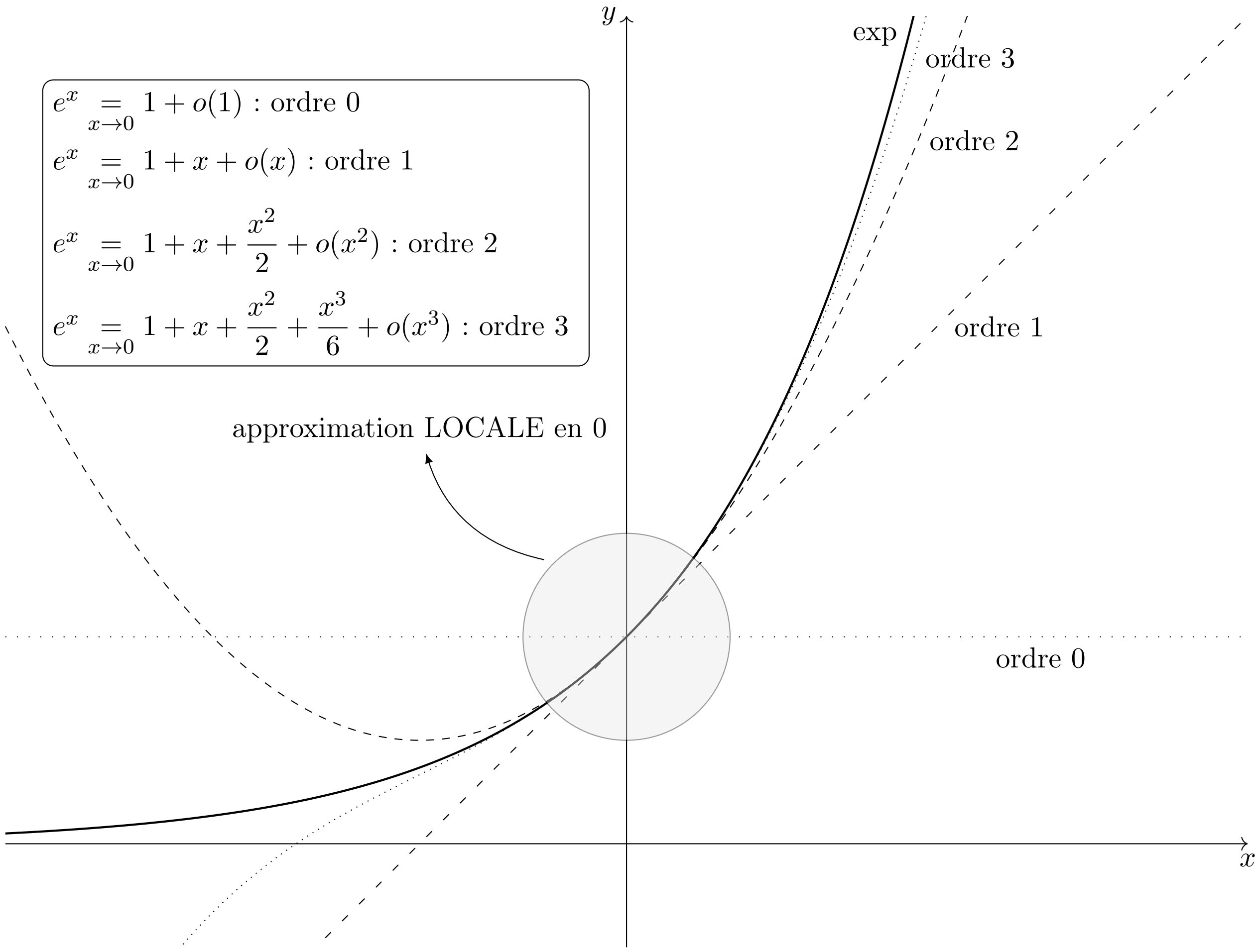
3 Développements limités

Soit I un intervalle et $n \in \mathbb{N}$.
On souhaite approcher, au voisinage d'un point (généralement 0), les fonctions par des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n.

3.a Développement limité en 0

On suppose ici $0 \in I$ ou 0 est une extrémité de I.
Proposition-définition :

> Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
> On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en 0 s'il existe des réels $a_0, \dots, a_n$ tels que :
>
> Les réels $a_0, \dots, a_n$, lorsqu'ils existent, sont uniques.
> La fonction polynomiale $P_n : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ s'appelle partie régulière ou partie principale du *DL* d'ordre n de f en 0.



Remarques :

- Plus n est grand, plus la quantité x^n est petite au voisinage de 0 donc plus l'approximation de f obtenue au voisinage de 0 est précise.
- $\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = a_0}$: le terme constant du DL en 0 est la limite de f en 0 (éventuellement nul).

Exemple : exp admet le DL d'ordre 3 en 0 suivant :

$$e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Cela signifie que la fonction polynomiale de degré ≤ 3 la plus proche de exp au voisinage de 0 est la fonction $x \mapsto 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$.

D'ailleurs, on en tire aussi que : $e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.
Donc la fonction polynomiale de degré ≤ 2 la plus proche de exp au voisinage de 0 est $x \mapsto 1 + x + \frac{x^2}{2}$.

Généralisons :
Proposition :

(Troncature)
On suppose $0 \leq p \leq n$. Si f admet un DL à l'ordre n en 0 :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} + \cdots + a_n x^n + o(x^n),$$

alors f admet un DL à l'ordre p en 0 : $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p + o(x^p)$.

Remarque : En notant a_i le premier coefficient non nul dans le DL :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to 0}{=} a_i x^i + \cdots + a_n x^n + o(x^n) \text{ car } a_0 = \cdots = a_{i-1} = 0 \\ &\underset{x\to 0}{=} a_i x^i + o(x^i) \text{ par troncature} \end{aligned}$$

Et comme a_i est non nul, un $o(x^i)$ est un $o(a_i x^i)$, donc on a $\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_i x^i}$:
$\boxed{\text{un équivalent de } f(x) \text{ est donné par le premier terme non nul dans le DL.}}$

Exemple : Déterminer le DL à l'ordre n en 0 de $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$, puis celui de $g : x \mapsto \frac{1}{1+x}$.

Démonstration 7

3.b DL en 0 à connaître

c.f. Fiche distribuée.
Un chapitre ultérieur permettra de justifier ces DL.
Plus précisément, les DL en 0 de exp, cos, sin et $x \mapsto (1+x)^\alpha$ s'obtiendront par la formule de Taylor-Young, et tous les autres s'en déduisent grâce aux techniques de calculs sur les DL.

3.c Techniques de calculs

Elles sont présentées sur des exemples, qu'il faut absolument savoir refaire.

Remarque : Pour obtenir un DL de $f+g$, $f\times g$, $g\circ f$ à l'ordre n, on peut toujours partir d'un DL de f à l'ordre n et d'un DL de g à l'ordre n. On peut cependant souvent faire mieux, c'est-à-dire partir de DL de f et g à des ordres inférieurs à n, mais au cas par cas et en réfléchissant.

3.c.i Passage de x à $-x$

Comme nous l'avons vu pour le DL de $\dfrac{1}{1+x}$ à partir de celui de $\dfrac{1}{1-x}$:
Si f admet un DL à l'ordre n en 0 alors $x\mapsto f(-x)$ admet aussi un DL à l'ordre n en 0, qui s'obtient en remplaçant x par $-x$ dans le DL initial.

3.c.ii Combinaisons linéaires

Exemple : Déterminer le DL à l'ordre 3 en 0 de $f : x\mapsto 2\cos x - 3\ln(1+x)$.

Démonstration 8

C'est aussi ce qui permet de prouver/retrouver les DL de ch et sh :
On sait que $e^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)$

Remarque : de même, par différence, on obtient $\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} x+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}+o(x^5)$.
Mais en sommant partant du DL à l'ordre 6 de e^x, on obtiendrait

De manière générale :

- pour $\mathrm{ch}(x)$, derrière les termes $1+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$, on peut mettre $+o(x^{2n})$ ou $+o(x^{2n+1})$
- pour $\mathrm{sh}(x)$, derrière les termes $x+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, on peut mettre $+o(x^{2n+1})$ ou $+o(x^{2n+2})$

3.c.iii Produits

En première approche, on développe chacun des facteurs à l'ordre final demandé.

Exemple 1 : Déterminer le DL à l'ordre 2 en 0 de $f : x\mapsto \dfrac{\cos x}{\sqrt{1+x}}$.

Démonstration 9

Exemple 2 : Déterminer le DL à l'ordre 4 en 0 de $f : x\mapsto x\ln(1+x)$.

Démonstration 10

Exemple 3 : Déterminer le DL à l'ordre 6 en 0 de $f : x \mapsto (1 - \cos x)(\sin x - x)$.

Démonstration 11

Exemple 4 : Déterminer le DL à l'ordre 4 en 0 de $f : x \mapsto \dfrac{x^2(x-2)}{x-1}$.

Démonstration 12

Exemple 5 : Déterminer le DL à l'ordre 5 en 0 de $f : x \mapsto (\sin(x))^3$.

Démonstration 13

Retenir qu'une bonne méthode, pour les puissances, est de passer par des DL normalisés :

$$\left(x^2 + 3x^3 - x^4 + o(x^4)\right)^2$$

3.c.iv Inverse

On commence toujours par développer l'« intérieur », à l'ordre demandé.
On transforme l'expression pour obtenir la forme $\dfrac{1}{1+u}$ avec u qui tend vers 0 quand $x \to 0$.

Exemple 1 : Déterminer le DL à l'ordre 3 en 0 de $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+\sin(x)}$.

Démonstration 14

Exemple 2 : Déterminer le DL à l'ordre 3 en 0 de $f : x \mapsto \dfrac{1}{2+x+x^2}$.

Démonstration 15

L'inverse est un cas particulier de composition : on composait $\dfrac{1}{1+u}$ avec un autre DL (l'« intérieur »).

3.c.v Quotient

On transforme l'expression pour obtenir la forme $f(x) \times \dfrac{1}{1+u}$ avec u qui tend vers 0 quand $x \to 0$.

Exemple 1 : Déterminer le DL à l'ordre 3 en 0 de tan.

Démonstration 16

Lorsque le dénominateur initial a une limite nulle, il faut partir de développements limités à un ordre plus grand que celui demandé, car il y a des x qui se simplifient entre numérateur et dénominateur.

Exemple 2 : Déterminer le DL à l'ordre 4 en 0 de $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$.

Démonstration 17

Exemple 2 : Déterminer le DL à l'ordre 2 en 0 de $f : x \mapsto \dfrac{\tan x}{\operatorname{Arctan} x}$.

Démonstration 18

3.c.vi Composition

On développe toujours « l'intérieur » à l'ordre demandé. C'est « l'extérieur » qui, parfois, peut être développé à un ordre plus petit.

Exemple 1 : Déterminer le DL à l'ordre 3 en 0 de $f : x \mapsto e^{\sin x}$.

Démonstration 19

Exemple 2 : Déterminer le DL à l'ordre 2 en 0 de $f : x \mapsto \exp\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$.

Démonstration 20

Exemple 3 : Déterminer le DL à l'ordre 4 en 0 de $f : x \mapsto \sqrt{1 + x\sin(x)}$.

Démonstration 21

3.d DL en x_0

Proposition-définition :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$ ou x_0 est une extrémité réelle de I.
On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 s'il existe des réels $a_0, \ldots, a_n$ tels que

Ce qui revient à :

Lorsque le DL d'ordre n en x_0 existe, il est unique.

Exemple : Déterminer le DL à l'ordre 3 en 2 de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

Démonstration 22

Remarques :

- Ne surtout pas développer les puissances $(x - x_0)^k$.
- On effectue systématiquement le changement de variables : $h = x - x_0$ pour se ramener en 0.

Le DL de f à l'ordre n en x_0 s'écrit alors sous forme normalisée :

$$f(x) = f(x_0 + h) =$$

3.e Développements asymptotiques

Rappel : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $+\infty$.
On dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe de f au voisinage de $+\infty$ si

.

On a bien sûr une définition similaire en $-\infty$.

Pour trouver une asymptote, on peut chercher un développement asymptotique.

Par exemple, on peut trouver une égalité de la forme : $\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{=} ax + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)}$.

- On en tire : $f(x) - (ax + b) = \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$, d'où :

  ce qui donne que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ de f en $+\infty$.

- $*$ Si $c \neq 0$,

  ce qui donne le signe de la quantité $f(x) - (ax+b)$ au voisinage de $+\infty$, et donc les positions relatives de $\mathcal{C}$ et de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

  $*$ Si $c = 0$, alors on développe à un ordre plus élevé, et on fait le même type de raisonnement, par exemple avec un terme $\frac{d}{x^2}$ avec d non nul...

Exemple : Montrer que la courbe de f admet une asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$ et étudier les positions relatives : $f(x) = \frac{x^2}{x-1} e^{\frac{1}{x}}$

Démonstration 23

On peut aussi faire des développements asymptotiques de suites :
Exemple : Déterminer le développement asymptotique de $u_n = \ln\left(\frac{n^2 - 1}{n + 2}\right)$ à la précision $\frac{1}{n^2}$.

Démonstration 24

Plan du cours