

## Chapitre 8. Suites numériques.

### 1 Généralités sur les suites réelles

#### 1.a Définition

**Définition :**

Une suite réelle est une application  $u$  de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{R}$  :

$$u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

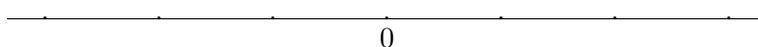
$$n \mapsto u(n)$$

**Conventions et vocabulaire :**

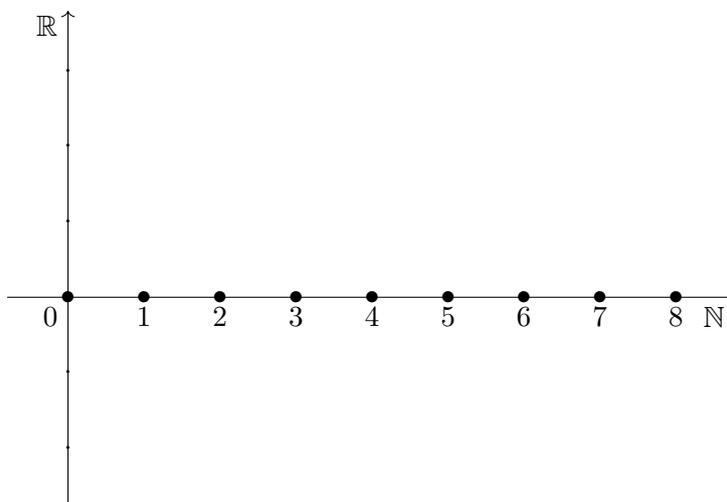
- L'image  $u(n)$  de l'entier  $n$  est plutôt noté  $u_n$ , et on l'appelle le  $n$ ième terme de la suite  $u$ .  
On l'appelle aussi le terme général de la suite.
- La suite se note  $u$ , ou  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , ou  $(u_n)_n$ , ou  $(u_n) \dots$   
⚠ En tout cas pas  $u_n$  qui est un réel!!
- L'ensemble des suites réelles est noté  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .  
On écrit par exemple :  $(3^n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .
- La définition s'étend aux suites définies seulement à partir de 1, ou à partir d'un  $n_0 \in \mathbb{N}^*$ .  
La suite est alors notée  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  ou  $(u_n)_{n \geq n_0}$ .

#### Représentations graphiques possibles

Sur l'axe des réels :



Représentation comme fonction :



## 1.b Opérations sur les suites, relation d'ordre

Soient  $u$  et  $v$  des suites réelles. On définit :

- La suite somme  $u + v$  comme la suite de terme général  $u_n + v_n$
- La suite produit  $u \times v$  comme la suite de terme général  $u_n \times v_n$
- La suite  $\lambda.u$ , avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ , comme la suite de terme général  $\lambda u_n$
- Si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n \neq 0$ , la suite quotient  $\frac{u}{v}$  comme la suite de terme général  $\frac{u_n}{v_n}$

Les lois  $+$  et  $\times$  ainsi définies sur l'ensemble des suites  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  ont de bonnes propriétés : commutativité, associativité, distributivité... mais attention ! Ce n'est pas toujours comme dans  $\mathbb{R}$  :

- Si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq v_n$ , alors on note :  $u \leq v$ .

## 1.c Caractéristiques éventuelles d'une suite

### Définition :

Soit  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . On dit qu'elle est :

- constante si
  
- stationnaire si
  
- majorée si
  
- minorée si
  
- bornée si
  
  
- croissante si
- strictement croissante si
- décroissante si
- strictement décroissante si
- monotone si
- strictement monotone si

⚠ Il existe des suites ni croissantes, ni décroissantes : par exemple

Deux méthodes (parmi d'autres) pour montrer qu'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est monotone ou strictement monotone :

- 
- 

**Exemples :** Étudier la monotonie des suites de termes généraux :  $u_n = \sum_{k=0}^n e^k$       $v_n = \frac{2^n}{n!}$



**Démonstration 1**

**Remarque :**

Les deux suites précédentes sont définies explicitement : on donne, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$  uniquement. Mais une suite peut aussi être définie :

- implicitement : par exemple,
  - "On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  le nombre d'entiers inférieurs ou égaux à  $n$  qui soient premiers"
  - "On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n$  l'unique solution de l'équation  $x - \ln(x) = n$  dans  $[1, +\infty[$ "
- par récurrence : on donne une relation entre  $u_{n+1}$  et  $u_n$  (ou bien entre  $u_{n+2}$ ,  $u_{n+1}$  et  $u_n$ ; entre  $u_{n+1}$  et tous les  $u_k$  avec  $k \leq n...$ ); et on donne aussi les valeurs d'un ou plusieurs premiers termes; de sorte que l'on pourrait calculer les termes successifs de la suite de proche en proche...

**1.d Suites récurrentes**

**Définition :**

On appelle suite récurrente simple toute suite  $u$  définie par la donnée de  $u_0$  et d'une relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

où  $f$  est une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles.

**Exemple :** 
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1 - u_n} \end{cases}$$

 L'existence d'une telle suite n'est pas évidente a priori.

Considérons par exemple : 
$$\begin{cases} v_0 = -3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \sqrt{1 - v_n} \end{cases}$$

Montrons cependant que dans notre premier exemple, la suite  $(u_n)$  est bien définie :

 **Démonstration 2**

De façon plus générale, on essaye de trouver un intervalle  $I$  qui soit stable par  $f$  et tel que  $u_0 \in I...$

**Définition :**

Soit  $f$  une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles.

On dit qu'un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  est stable par  $f$  si

Par exemple, avec  $f : x \mapsto \sqrt{1 - x}$  :

On peut alors redémontrer que la suite  $(u_n)$  est bien définie à l'aide d'une récurrence très rapide, en posant, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{P}_n : \text{"le réel } u_n \text{ existe, et il est dans } I"$ .

## 1.e Les exemples classiques de suites récurrentes simples à connaître

- S'il existe un réel (ou un complexe...)  $r$  tel que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \boxed{u_{n+1} = u_n + r}$  :  
 $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite arithmétique de raison  $r$ .

Une récurrence sur  $n$  permet d'obtenir le terme général de façon explicite :

- S'il existe un réel (ou un complexe...)  $q$  tel que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \boxed{u_{n+1} = qu_n}$  :  
 $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison  $q$ .

Une récurrence sur  $n$  permet d'obtenir le terme général de façon explicite :

Si la suite n'est définie que sur  $\mathbb{N}^*$  :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,

On verra qu'elle converge si et seulement si

- S'il existe des réels  $a$  et  $b$  tels que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \boxed{u_{n+1} = au_n + b}$  :  
 $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite arithmético-géométrique.

**Méthode à connaître** :  $\boxed{\text{Résoudre } \ell = al + b}$ . La suite  $(u_n - \ell)$  sera alors géométrique, ce qui permet d'en tirer  $u_n$  en fonction de  $n$ .

**Exemple** : Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 = 0$  et :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2}$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .



### Démonstration 3

- S'il existe des réels  $a$  et  $b$ , avec  $b \neq 0$ , tels que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \boxed{u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n}$  :  
 $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite récurrente linéaire double/d'ordre 2.

La donnée d'une telle relation et de  $u_0$  et  $u_1$  détermine tous les termes de la suite.

Avec ces notations :

### Théorème :

On note  $(E)$  :  $\lambda^2 - a\lambda - b = 0$ , et on l'appelle l'équation caractéristique de la suite  $u$ .

- Si  $(E)$  a deux racines réelles distinctes  $r_1$  et  $r_2$ , alors
- Si  $(E)$  a une racine réelle double  $r_1$ , alors
- Si  $(E)$  a deux racines non réelles distinctes  $r_1$  et  $r_2$ , alors ces racines sont non nulles et conjuguées l'une de l'autre ; on les écrit sous forme trigonométrique

**Exemple** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $\begin{cases} u_0 = 5, u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .



### Démonstration 4

## 2 Limite d'une suite réelle

### 2.a Limite finie, définition de la convergence

#### Définition :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle.

- Soit  $\ell$  un réel. On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

On note cela

- Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas convergente, on dit qu'elle diverge/est divergente.



Le réel strictement positif quelconque  $\varepsilon$  est non nul mais aussi petit que l'on veut ; il représente l'erreur commise lorsqu'on prend  $u_n$  comme valeur approchée de  $\ell$ .

#### Remarques sur l'inégalité " $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ " :

- Elle s'écrit aussi :
- On peut la remplacer, dans la définition, par " $|u_n - \ell| < \varepsilon$ ".

**Exemple** Montrons que  $\frac{1}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .



#### Démonstration 5

#### Proposition :

(unicité de la limite)

Si une suite est convergente, alors elle admet une unique limite.



#### Démonstration 6

Ceci nous autorise à utiliser la notation  $\lim$  : si  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ , on peut noter  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ .

**Proposition :**

Toute suite convergente est bornée.

---



**Démonstration 7**

⚠ La réciproque est fautive :

## 2.b Suites convergentes vers 0

**Proposition :**

Soit  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  et  $\ell \in \mathbb{R}$ .  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell \iff$   
 $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0  $\iff$

---

En effet :

**Proposition :**

Soient  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ,  $M \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  et  $\ell \in \mathbb{R}$  tels que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  (ou à partir d'un certain rang) :

$$|u_n - \ell| \leq M_n$$

On suppose que  $M_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Alors  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ .

---



**Démonstration 8**

Méthode à retenir :

**Exemples :**

Pour tout  $n \geq 2$ , on pose  $u_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$ . Montrer que  $(u_n)_{n \geq 2}$  converge vers une limite à préciser.

Même question avec  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par  $v_n = \frac{2n}{n - \text{Arctan}(n)}$ .



**Démonstration 9**

**Corollaire :**

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R} \implies$$

---



**Démonstration 10**

⚠ La réciproque est fautive : contre-exemple

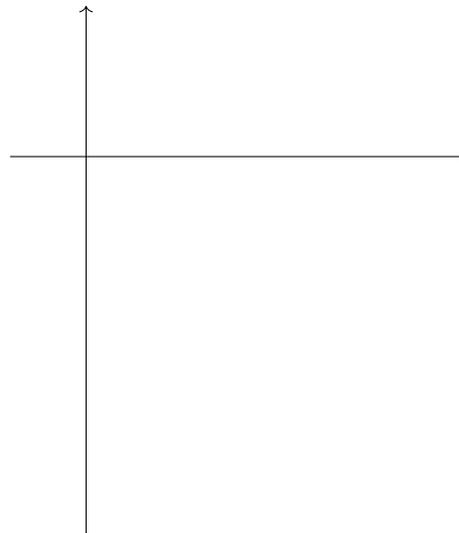
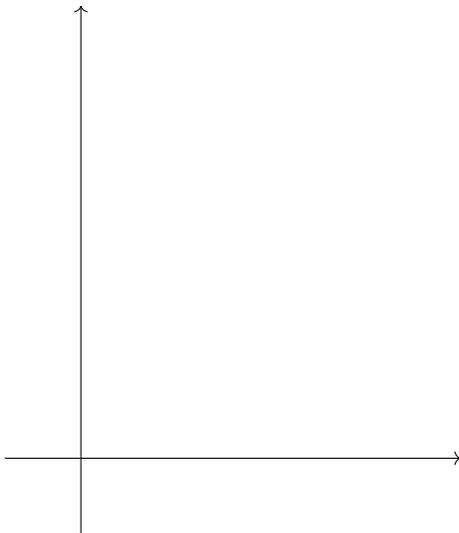
## 2.c Divergence vers $+\infty$ ou $-\infty$

### Définition :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle.

- On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge vers  $+\infty$  si :  
et on note  $u_n \rightarrow +\infty$

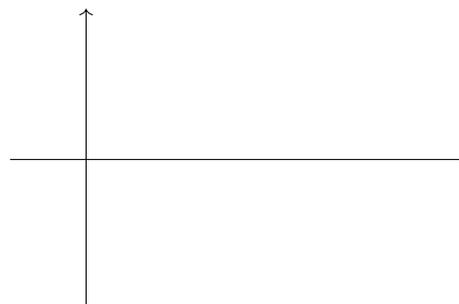
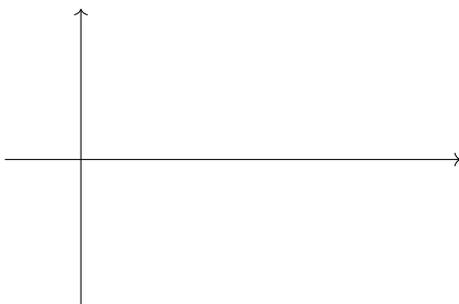
- On dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge vers  $-\infty$  si :  
et on note  $u_n \rightarrow -\infty$



### Remarques :

- Dans les définitions, on peut remplacer " $\forall A \in \mathbb{R}$ " par " $\forall A \in \mathbb{R}^+$ "; " $\forall B \in \mathbb{R}$ " par " $\forall B \in \mathbb{R}^-$ ";  $u_n \leq B$  par  $u_n < B$ ;  $u_n \geq A$  par  $u_n > A$ .
- **⚠** une suite divergente ne tend pas nécessairement vers  $+\infty$  ou  $-\infty$ ; elle peut avoir d'autres types de comportements.

Exemples :



**Exemple :** Montrer que la suite  $u$  définie par  $u_n = \sqrt{n+4}$  tend vers  $+\infty$ .

 **Démonstration 11**

**Proposition :**

Soit  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

- Si  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ , alors  $(u_n)$  n'est pas  $l$ , mais elle est  $+\infty$
- Si  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$ , alors  $(u_n)$  n'est pas  $l$ , mais elle est  $-\infty$

 **Démonstration 12**

**Conséquences :**

- Si  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$  ou  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$ , alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien divergente : elle ne converge pas vers un réel  $l$ . En effet,
- Une suite ne admettre à la fois  $+\infty$  et  $-\infty$  comme limite.
- On en déduit qu'il y a encore unicité de la limite, et qu'on peut utiliser la notation  $\lim$ .

 Les réciproques sont fausses :

### 3 Opérations sur les limites

Pour simplifier les énoncés, on va étendre les opérations  $+$  et  $\times$  à  $\overline{\mathbb{R}} : \mathbb{R}$  auquel on adjoint  $-\infty$  et  $+\infty$ . Lorsque l'opération ne peut être définie, on parle de "forme indéterminée" ( $FI$ ) ; il faudra faire une étude au cas par cas.

$+$	$-\infty$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$			
$l' \in \mathbb{R}$			
$+\infty$			

$\times$	$-\infty$				$+\infty$
$-\infty$					
$+\infty$					

	$l = -\infty$	$l < 0$	$l = 0$	$l > 0$	$l = +\infty$
$\frac{1}{l}$					

Dans la suite,  $u$  et  $v$  désignent deux suites réelles, et  $l, l'$  des éléments de  $\overline{\mathbb{R}}$ .

### 3.a Somme et mutiplication par un scalaire

Proposition :

- Si  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$  et si  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ , alors
- Si  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$  et si  $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell'$ , alors



Démonstration 13

### 3.b Produit, inverse

Proposition :

(Produit dans un cas particulier)

Si  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$  et si  $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell'$ , alors  $u_n v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .



Démonstration 14

Exemple :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{\sin n}{n}$ .

Proposition :

Si  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$  et si  $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell'$ , alors



Démonstration 15

Résultats importants, à connaître et à savoir redémontrer :

- Si  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$  avec  $\ell > 0$ , alors  
Plus précisément,
- De même, si  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$  avec  $\ell < 0$ , alors
- En conséquence, si  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$  avec  $\ell \neq 0$ , alors



Démonstration 16



**Proposition :**

- Si  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$  avec  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$  et  $\ell \neq 0$ , alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est non nulle à partir d'un certain rang, et  $\frac{1}{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{\ell}$ .
- Si  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ , il y a trois cas :
  - Si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$  (ou bien à partir d'un certain rang) :
  - Si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 0$  (ou bien à partir d'un certain rang) :
  - Sinon,



**Démonstration 17**

On en déduit les résultats pour les quotients :  $\frac{u_n}{v_n} = u_n \times \frac{1}{v_n}$ .

Avec le quotient, les formes indéterminées sont

**Exemples :** Montrer que les suites suivantes convergent, et déterminer leurs limites :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n^2 + 3n + 8}{3n^2 + n + 1} \quad v_n = 3n^2 - \sqrt{n}$$



**Démonstration 18**

### 3.c Composition par une fonction, applications : limites à connaître

**Proposition :**

(Composition) Soient  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ,  $I$  un intervalle,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a, \ell$  des éléments de  $\overline{\mathbb{R}}$ .

On suppose que

Si \_\_\_\_\_ et si \_\_\_\_\_, alors

En particulier, si  $\ell \in I$  et si  $f$  est continue en  $\ell$ , alors :

**Exemples :**

- 
- 

**Proposition :**

(Croissances comparées)

Soient  $\alpha$  et  $\beta$  des réels, avec  $\alpha > 0$ .  $\lim_{n \rightarrow +\infty}$   $\lim_{n \rightarrow +\infty}$

**Proposition :**

Soit  $u$  une suite qui converge vers 0.

**Exemples :**  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = e^n \sin(e^{-n}); v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$



**Démonstration 19**

Ne pas inventer de "formule" pour les puissances, et toujours revenir à la forme exponentielle de la puissance.

Par exemple, " $1^\infty$ " est une *FI*, ce n'est pas 1...

## 4 Limites et inégalités

### 4.a Passage à la limite

**Théorème :**

- Soit  $u$  une suite réelle convergente.  
On suppose que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  (ou bien à partir d'un certain rang) :  $u_n \geq 0$ .  
Alors
- Soient  $u$  et  $v$  deux suites réelles convergentes.  
On suppose que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  (ou bien à partir d'un certain rang) :  $u_n \leq v_n$ .  
Alors



**Démonstration 20**

Cela ne marche plus en général pour les inégalités strictes.

On retiendra donc : "le passage à la limite transforme toute inégalité en inégalités larges".

## 4.b Théorèmes d'existence

**Théorème :**

(Théorème d'encadrement ou "théorème des gendarmes")

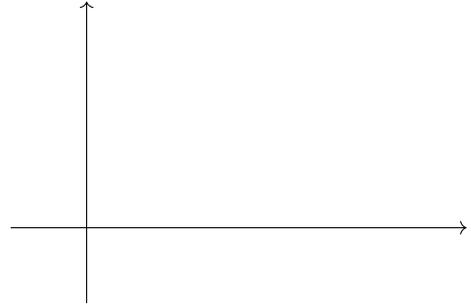
Soient  $u, v, w$  des suites telles que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  (ou à partir d'un certain rang) :

On suppose que  $(u_n)$  et  $(w_n)$  sont

Alors :

•

•



**Démonstration 21**

**Exemple :**  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$ .

**Théorème :**

Soient  $u, v$  des suites telles que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  (ou à partir d'un certain rang) :

$$\boxed{u_n \leq v_n}$$

- (théorème d'existence de limite par )

Si  $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$  alors  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$

- (théorème d'existence de limite par )

Si  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$  alors  $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$



**Démonstration 22**

## 5 Théorèmes fondamentaux

### 5.a Suites monotones

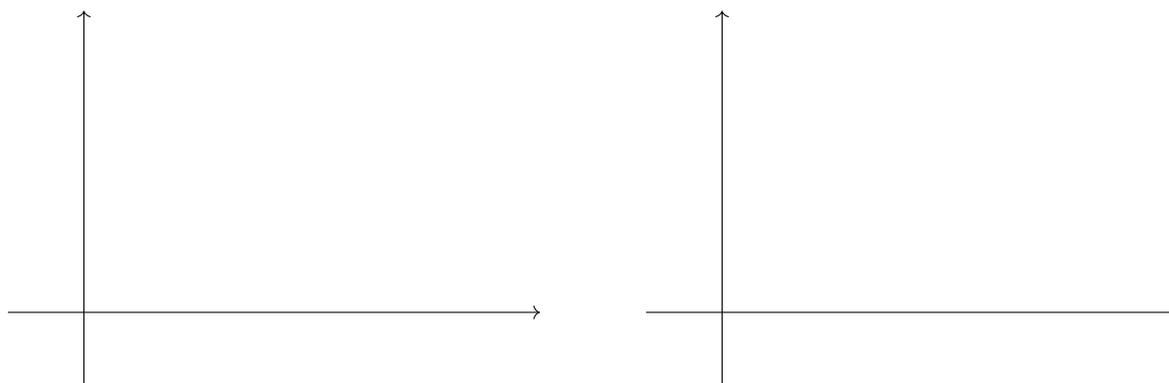
**Théorème :**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite croissante.

- Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée alors
- Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas bornée alors



**Démonstration 23**



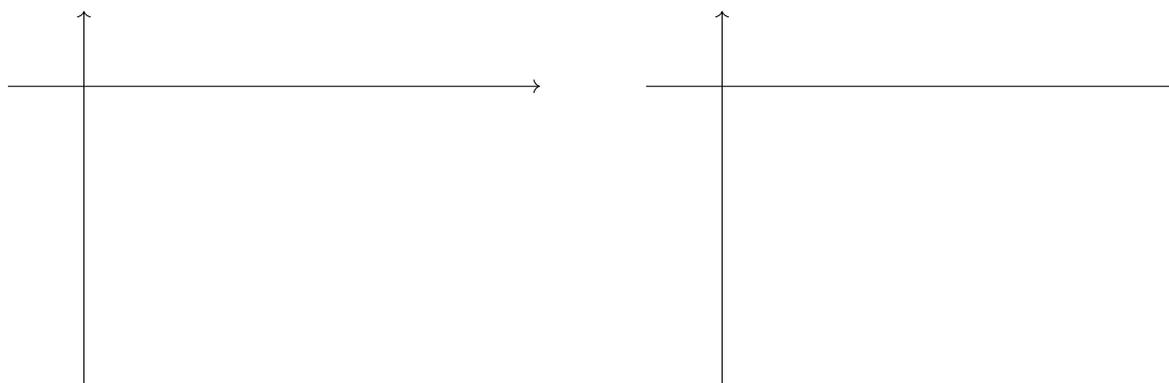
**Théorème :**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite décroissante.

- Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée alors
- Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas bornée alors



**Démonstration 24**



Ainsi, une suite monotone admet toujours une limite, finie ou infinie.

**Exemple :** On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$ . Montrons que  $u$  converge.



**Démonstration 25**

(Tarte à la crème) Le majorant obtenu, dans le cas croissant majorée, n'est pas (a priori) la limite !

On a cependant les résultats faciles suivants :

**Proposition :**

- Si  $u$  est croissante et si elle converge vers un réel  $\ell$ , alors
- Si  $u$  est strictement croissante et si elle converge vers un réel  $\ell$ , alors



**Démonstration 26**

Résultats adaptables pour la décroissance et la stricte décroissance.

## 5.b Suites adjacentes

**Définition :**

Soient  $u$  et  $v$  deux suites réelles.

On dit qu'elles sont adjacentes si :

- 
- 
- 



**Exemple :** On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$  et  $v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$ .

Montrer que  $u$  et  $v$  sont adjacentes.



**Démonstration 27**

**Théorème :**

Soient  $u$  et  $v$  deux suites adjacentes.

Alors

De plus, si  $u$  est la suite croissante et  $v$  la suite décroissante, en notant  $\ell$  leur limite commune :



**Démonstration 28**

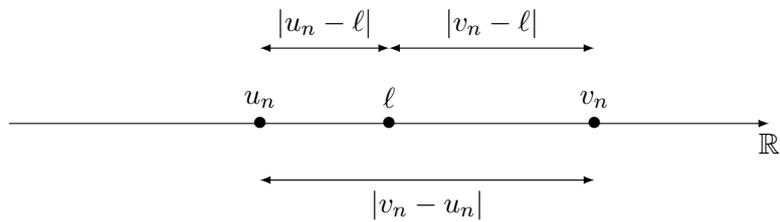
Si les monotonies de  $u$  et  $v$  sont strictes, les inégalités sont même strictes :

**Remarque :**

On sait qu'il y a une limite commune  $\ell$ , mais trouver  $\ell$  est un autre problème.

En informatique, les suites adjacentes peuvent servir de valeurs approchées de la limite commune  $\ell$ .

L'avantage est qu'on a une majoration de l'erreur commise :



Exemple : Notons  $\ell$  la limite commune des suites  $u$  et  $v$  de la démonstration 27.

## 6 Suites extraites

### 6.a Définition

Exemple introductif :

$u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad u_5 \quad u_6 \quad u_7 \quad u_8 \quad u_9 \quad u_{10}$

**Définition :**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle.

On appelle suite extraite de  $u$  toute suite de la forme

**Exemples :**

### 6.b Liens avec les limites et la convergence

**Théorème :**

On suppose que  $u$  a pour limite  $\ell$ , avec  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ .

Alors



**Démonstration 29**

Utilisation très importante : montrer qu'une suite diverge ou qu'elle n'a pas de limite

- |   |
|---|
| Si on trouve une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui<br>alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge |
|---|

En effet :

- |   |
|---|
| Si on trouve deux suites extraites qui<br>alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite. |
|---|

En effet :

**Exemples :**  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n \quad v_n = (-1)^n n$



**Démonstration 30**

**Théorème :**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite et  $\ell$  un élément de  $\overline{\mathbb{R}}$  tels que

Alors  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ .



**Démonstration 31**

## 6.c Conséquence : à propos des suites géométriques

**Proposition :**

Soit  $q \in \mathbb{R}$ .  $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge  $\iff$

Précisons les limites éventuelles :

$q \leq -1$	$q \in ] -1, 1[$	$q = 1$	$q > 1$



**Démonstration 32**

## 7 Exemples d'études de suites récurrentes générales

Nous allons voir la méthode pour étudier les suites réelles  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par la donnée de  $u_0$  et par la relation de récurrence :

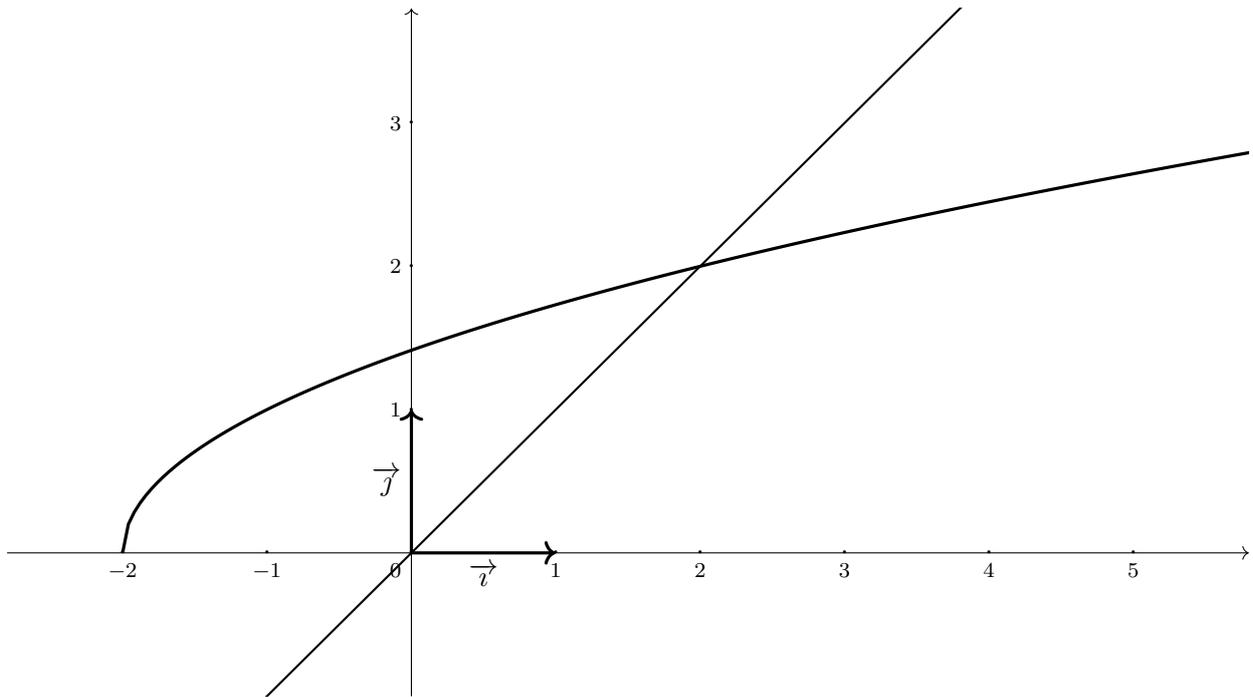
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

### 7.a Représentation graphique

On commencera toujours par tracer, au brouillon, l'allure du graphe de  $f$ , avec la droite d'équation  $y = x$ . Cela permet de placer de proche en proche les termes de la suite.

Prenons l'exemple d'une suite définie par :  $\begin{cases} u_0 \geq -2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$

Ici on a  $f : [-2, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \sqrt{x + 2}$ .



## 7.b Limites éventuelles

### Théorème :

Soit  $u$  une suite telle que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ , où  $f$  est définie sur un intervalle.

Si  $u$  converge vers un réel  $\ell$  en lequel  $f$  est continue, alors



### Démonstration 33

Sur l'exemple ci-dessus, on "voit" graphiquement qu'il n'y a qu'un seul point fixe, 2, pour  $f$  (un seul point d'intersection entre la courbe représentative de  $f$  et la première bissectrice). Autrement dit, si on arrive à prouver que la suite converge, c'est forcément vers 2!

Il faudra donc d'abord montrer que la suite converge, ce qui se fait habituellement avec les théorèmes sur les suites monotones (toute suite croissante majorée converge...)

## 7.c Exemples

**Exercice 1.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite vérifiant :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$ .

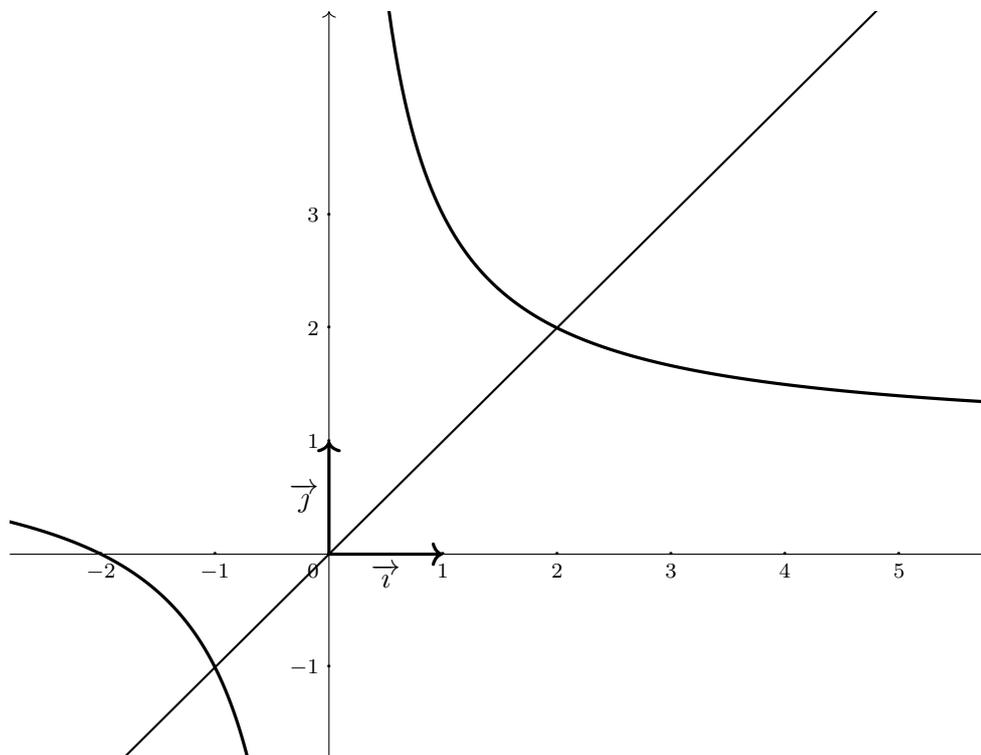
- 1) En notant  $f : x \mapsto \sqrt{x + 2}$ , étudier le signe de  $f(x) - x$  sur  $[-2, +\infty[$ .  
En déduire deux intervalles  $I_1$  et  $I_2$  stables par  $f$ , tels que  $I_1 \cup I_2 = [-2, +\infty[$ .
- 2) On suppose que  $u_0 \in I_1$  (celui contenant les valeurs les plus petites).
  - a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  est bien définie et appartient à  $I_1$ .
  - b) Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.
  - c) En déduire que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et déterminer sa limite.
- 3) Reprendre la question précédente avec  $I_2$ .



### Démonstration 34

**Exercice 2.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par : 
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \frac{2}{u_n} \end{cases}$$

Voici le graphe de  $f : x \mapsto 1 + \frac{2}{x}$ .



- a) À l'aide d'un intervalle  $I$  stable par  $f$ , justifier que la suite est bien définie.  
 b) On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n = u_{2n}$  et  $w_n = u_{2n+1}$ .  
 Montrer que  $v$  et  $w$  sont des suites récurrentes simples associées à la fonction  $g = f \circ f$  :

$$\forall n \in \mathbb{N},$$

- c) Quelle est la monotonie de  $g = f \circ f$  sur  $I$ ?  
 d) Montrer que  $v$  et  $w$  sont monotones de sens contraire.  
 e) En déduire que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et déterminer sa limite.

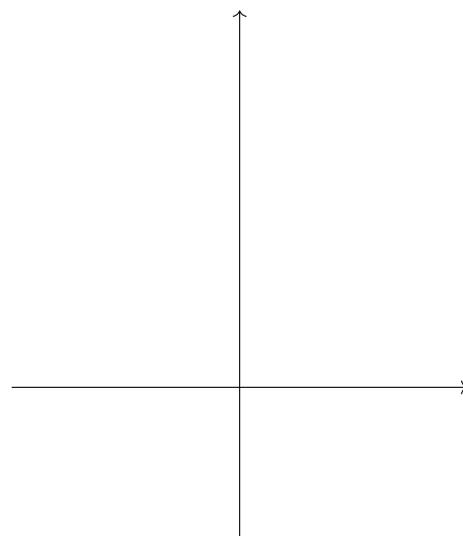
 **Démonstration 35**

**Exercice 3.** Soit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + u_n^2 \end{cases}$$

Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge vers  $+\infty$ .

 **Démonstration 36**



Idées à retenir pour prouver la monotonie de  $(u_n)$  :

- Utiliser le signe de  $f(x) - x$ . Cela marche si les termes de la suite sont dans un intervalle stable où le signe de  $f(x) - x$  est toujours le même.
- Utiliser le fait que la fonction est croissante : selon que  $u_0 \leq u_1$  ou  $u_0 \geq u_1$ , une récurrence montrera que  $(u_n)$  est croissante ou décroissante. C'est ce qu'on a fait dans l'exemple 2, mais avec la fonction  $g$ , croissante ; comme  $v_0 < v_1$ , la suite  $(v_n)$  était croissante ; comme  $w_0 > w_1$ , la suite  $(w_n)$  était décroissante.

## 8 Suites complexes

### 8.a Définitions

Une suite complexe est une application  $u$  de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{C}$ . On la note  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

L'ensemble des suites complexes est noté  $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ .

Voici trois suites réelles définies à partir de  $u$  :

- la suite  $\operatorname{Re}(u) = (\operatorname{Re}(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ .  $\operatorname{Re}(u)$  est appelée partie réelle de  $u$ .
- la suite  $\operatorname{Im}(u) = (\operatorname{Im}(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ .  $\operatorname{Im}(u)$  est appelée partie imaginaire de  $u$ .
- la suite  $|u| = (|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  (module).

⚠ Les notions de majorant, de minorant, de monotonie ne sont pas définies pour une suite complexe. Cependant :

**Définition :**

Soit  $u$  une suite complexe. On dit que  $u$  est bornée si :

$$\exists K \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq K$$

### 8.b Convergence

**Définition :**

Soit  $\ell \in \mathbb{C}$ . Soit  $u$  une suite complexe. On dit que  $u$  converge vers  $\ell$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

Cela revient à dire que la suite réelle  $(|u_n - \ell|)$  converge vers 0.

**Remarques :**

- En particulier, dire que  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$  est équivalent à dire que  $|u_n| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .
- Il y a encore unicité de la limite. On note :  $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .
- Si une suite complexe ne converge pas alors on dit qu'elle diverge.
- ⚠ Pour une suite complexe non réelle, il n'y a pas de définition possible pour des limites  $\pm\infty$ .

**Proposition :**

Soit  $u$  une suite complexe et  $\ell \in \mathbb{C}$ .

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \iff \begin{cases} \operatorname{Re}(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \operatorname{Re}(\ell) \\ \operatorname{Im}(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \operatorname{Im}(\ell) \end{cases}$$

**Démonstration 37****Exemples :**

- 1) Etudier la convergence de la suite  $u$  définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 + \frac{1}{2^n} + \left(2 + \frac{1}{n}\right) i$ .
- 2) Etudier la convergence de la suite  $u$  définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 + ni$ .
- 3) On pose :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{(1+i)^n}{2^n}$ . Montrer que  $u$  converge vers 0.

**Démonstration 38****Proposition :**

Soit  $u$  une suite complexe et  $\ell \in \mathbb{C}$ .

Si  $(u_n)$  converge vers  $\ell$  alors  $(|u_n|)$  converge vers  $|\ell|$ .

**Démonstration 39****Corollaire :**

Toute suite convergente est bornée.

**Démonstration 40**

La réciproque est bien sûr encore fausse.

**Proposition :**

Soit  $q \in \mathbb{C}$ . La suite  $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge si et seulement si  $|q| < 1$  ou  $q = 1$ .

Dans le cas  $|q| < 1$ , la limite est 0 ; dans le cas  $q = 1$ , la limite est 1.

**Démonstration 41****Proposition :**

Soient  $u$  et  $v$  deux suites convergeant respectivement vers  $\ell$  et  $\ell'$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

Alors  $\lambda u$  converge vers  $\lambda \ell$  ;  $u + v$  converge vers  $\ell + \ell'$  ;  $uv$  converge vers  $\ell \ell'$  ;

et si, pour tout  $n \in \mathbb{N}, v_n \neq 0$ , alors  $\frac{u}{v}$  converge vers  $\frac{\ell}{\ell'}$ .

**Remarque :**

On peut aussi définir la notion de suite extraite et les résultats concernant les suites extraites réelles restent valables dans le domaine complexe.

# Plan du cours

<b>1</b>	<b>Généralités sur les suites réelles</b>	<b>1</b>
1.a	Définition . . . . .	1
1.b	Opérations sur les suites, relation d'ordre . . . . .	2
1.c	Caractéristiques éventuelles d'une suite . . . . .	3
1.d	Suites récurrentes . . . . .	4
1.e	Les exemples classiques de suites récurrentes simples à connaître . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Limite d'une suite réelle</b>	<b>6</b>
2.a	Limite finie, définition de la convergence . . . . .	6
2.b	Suites convergentes vers 0 . . . . .	7
2.c	Divergence vers $+\infty$ ou $-\infty$ . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Opérations sur les limites</b>	<b>9</b>
3.a	Somme et multiplication par un scalaire . . . . .	10
3.b	Produit, inverse . . . . .	10
3.c	Composition par une fonction, applications : limites à connaître . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Limites et inégalités</b>	<b>12</b>
4.a	Passage à la limite . . . . .	12
4.b	Théorèmes d'existence . . . . .	13
<b>5</b>	<b>Théorèmes fondamentaux</b>	<b>14</b>
5.a	Suites monotones . . . . .	14
5.b	Suites adjacentes . . . . .	15
<b>6</b>	<b>Suites extraites</b>	<b>16</b>
6.a	Définition . . . . .	16
6.b	Liens avec les limites et la convergence . . . . .	16
6.c	Conséquence : à propos des suites géométriques . . . . .	17
<b>7</b>	<b>Exemples d'études de suites récurrentes générales</b>	<b>17</b>
7.a	Représentation graphique . . . . .	17
7.b	Limites éventuelles . . . . .	18
7.c	Exemples . . . . .	18
<b>8</b>	<b>Suites complexes</b>	<b>20</b>
8.a	Définitions . . . . .	20
8.b	Convergence . . . . .	20