Chapitre 6. Equations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2.

Dans toute la suite du chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Introduction

- Qu'est-ce qu'une équation différentielle ? C'est une équation dont l'inconnue est une fonction y, et qui fait intervenir non seulement y mais une ou plusieurs de ses dérivées (y', y''...).

  Exemples : $y'(x) = a\,y(x) + b$, $\quad y''(x) + \omega^2 y(x) = 0$, $\quad xy'(x) + y(x) = x^3$, $\quad y''(x) = \dfrac{y'(x)}{y(x)^2}$...

  Souvent, par abus de langage, on omet la variable x pour y, y' et y'' :
  on note $y' = ay + b$, $y'' + \omega^2 y = 0$, $xy' + y = x^3$, ...

- Le plus grand exposant de dérivation figurant dans l'équation est appelé ordre de l'équation.

- Dire que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est solution de l'équation $(E)\ :\ xy' + y = x^3$, c'est dire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $xf'(x) + f(x) = x^3$.
  Par exemple, justifier que $f : x \mapsto \frac{x^3}{4}$ est solution sur $\mathbb{R}$ de (E), c'est écrire :

  > $f : x \mapsto \frac{x^3}{4}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{3}{4}x^2$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $xf'(x) + f(x) = \dfrac{3}{4}x^3 + \dfrac{1}{4}x^3 = x^3$. Ainsi, f est solution de (E).

  Par contre, résoudre (E), c'est trouver toutes les solutions de (E) ; c'est moins évident !

- Les deux problèmes du mathématicien devant une équation (différentielle) :
  — Montrer l'existence d'une solution, voire l'unicité. [1]
  — Trouver la ou les solutions.

  Les équations différentielles sont en général très difficiles voire impossibles à résoudre de manière exacte (c.f. informatique pour la résolution approchée).

  Au programme, il y a les équations différentielles linéaires du premier ordre, et les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants, pour lesquelles on dispose de méthodes de résolution simples. Nous verrons aussi en exercice d'autres types d'équations différentielles, qui se ramènent à celle du programme, souvent à l'aide d'un changement de fonction inconnue.

1. Parfois on ne sait faire que cela... Pire, on peut ne pas arriver à montrer l'existence, seulement l'unicité !

2 Définition et structure de l'ensemble des solutions

2.a Définitions

Définition :

• On dit que (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 (normalisée) [a] si elle est de la forme :

$$(E) \quad : \quad y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$$

où a et b sont des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

• Résoudre (E), c'est trouver toutes les solutions de (E), c'est-à-dire toutes les fonctions $f : I \to \mathbb{K}$ dérivables sur I telles que pour tout $x \in I$, $f'(x) + a(x)f(x) = b(x)$.

• Lorsque le "second membre" $b(x)$ est constant égal à 0, on dit que l'équation est homogène :

$$y'(x) + a(x)y(x) = 0.$$

a. "normalisée" signifie que le coefficient de y' est 1

Définition :

• On dit que (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants si elle est de la forme :

$$(E) \quad : \quad ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d(x)$$

où a, b et c sont des constantes de $\mathbb{K}$, avec $\boxed{a \neq 0}$,
et où d est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

• Résoudre (E), c'est trouver toutes les solutions de (E), c'est-à-dire toutes les fonctions $f : I \to \mathbb{K}$ deux fois dérivables sur I telles que pour tout $x \in I$, $af''(x)+bf'(x)+cf(x) = d(x)$.

• Lorsque le "second membre" $d(x)$ est constant égal à 0, on dit que l'équation est homogène :

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0.$$

Exemples et contre-exemples :

$y'(x) - e^x\, y(x) = 0$

$y' = ay + b$

$y' + \exp(y) = x$

$y''(x) + \omega^2 y(x) = \sin(x)$

$3y''(x) + y'(x) + y(x)^2 = \ln(x)$

Remarque importante : Lorsque l'équation est linéaire et homogène, une fonction particulière est toujours solution :

2.b Structure de l'ensemble des solutions

Théorème :

Soit (E) : $y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$ une équation différentielle linéaire d'ordre 1 (a, b sont des fonctions continues sur un intervalle I).
Notons (H) l'équation homogène associée : (H) : $y'(x) + a(x)y(x) = 0$.
Supposons que y_p soit une solution particulière de (E) sur I.

Pour $y : I \to \mathbb{K}$ dérivable,

Démonstration 1

Théorème :

Soit (E) : $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d(x)$ une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. (d est une fonction continue sur un intervalle I).
Notons (H) l'équation homogène associée : (H) : $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$.
Supposons que y_p soit une solution particulière de (E) sur I.

Pour $y : I \to \mathbb{K}$ deux fois dérivable,

Moralité : Pour résoudre (E), il suffit de :
- résoudre (H)
- trouver une solution particulière, s'il en existe (sinon c'est qu'il n'y a pas de solution).

Si on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (E), $\mathcal{S}_H$ l'ensemble des solutions de (H), et y_p une solution particulière de (E) :

Cela se note : .

Exemple : (E) : $y' + 2y = 1$.
Admettons provisoirement que les solutions de (H) : $y' + 2y = 0$ sont les fonctions de la forme $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{-2x} \end{array}$, $\lambda \in \mathbb{R}$..

Remarque

Pour décrire les solutions d'une équation différentielle (E), attention aux formulations :

correct	**incorrect**
Les solutions de (E) sur I sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{-2x} + \frac{1}{2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$.	Les solutions de (E) sur I sont de la forme $x \mapsto \lambda e^{-2x} + \frac{1}{2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$
L'ensemble des solutions de (E) sur I est $\left\{x \mapsto \lambda e^{-2x} + \frac{1}{2} \;/\; \lambda \in \mathbb{R}\right\}$	L'ensemble des solutions de (E) sur I est $\left\{\lambda e^{-2x} + \frac{1}{2} \;/\; \lambda \in \mathbb{R}\right\}$
y solution de (E) sur I $\iff \exists\, \lambda \in \mathbb{R}, \forall\, x \in I,\, y(x) = \lambda e^{-2x} + \frac{1}{2}$	y solution de (E) sur I $\iff y(x) = \lambda e^{-2x} + \frac{1}{2},\, \lambda \in \mathbb{R}$.

2.c Principe de surperposition des solutions

Théorème :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, a, b_1, b_2 des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$, et λ_1, λ_2 des éléments de $\mathbb{K}$.
On considère :

$$(E) \;:\; y' + a(x)y = \lambda_1 b_1(x) + \lambda_2 b_2(x).$$

Si y_1 est une solution de $(E_1) : y' + a(x)y = b_1(x)$,
et si y_2 est une solution de $(E_2) : y' + a(x)y = b_2(x)$,
alors $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est une solution de (E).

Démonstration 2

Ce théorème est également valable pour les équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants.

Exemple d'utilisation : $(E) : y'' + 4y = 1 + e^x$.
Admettons provisoirement que les solutions de $(H) : y'' + 4y = 0$ sont les fonctions de la forme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda\cos(2x) + \mu\sin(2x) \end{array}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Déterminons l'ensemble des solutions de (E).

3 Équations différentielles linéaires d'ordre 1 (EDL1)

3.a Résolution de l'équation homogène associée

Théorème :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $a : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue.
Les solutions de (H) : $y'(x) + a(x)y(x) = 0$ sur I sont les fonctions de la forme :

où

Démonstration 3

On retrouve que la fonction nulle est solution de (H) :

Cas particulier très important :
Si la fonction a est constante, égale à α, alors une primitive de $a : x \mapsto \alpha$ est

Corollaire :

Les solutions de $y'(x) + \alpha y(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme :

Exemples : $(H_1) : y' + xy = 0$; $(H_2) : (1 + x^2)y' - y = 0$; $(H_3) : xy' - y = 0$

Démonstration 4

Remarque : il est conseillé de toujours vérifier ses résultats au brouillon, en injectant la forme des solutions trouvée dans l'équation.

3.b Cas d'une équation avec second membre

On considère (E) : $y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$ avec a, b continues sur un intervalle I.

Méthode :

- Résoudre l'équation homogène associée (H) : $y'(x) + a(x)y(x) = 0$
- Trouver une solution particulière, pour cela :
  — Chercher d'abord s'il n'y aurait pas une solution particulière "évidente"
  (penser au principe de superposition des solutions)
  — Sinon, appliquer la méthode de variation de la constante (c.f. ci-dessous)
- Conclure en ajoutant la solution particulière à la forme générale des solutions de (H).

Méthode de variation de la constante
On cherche une solution particulière y_p sous la forme $\boxed{y_p : x \mapsto \lambda(x)e^{-A(x)}}$,
où A est une primitive de a sur I et $\boxed{\lambda : I \to \mathbb{K} \text{ est } \underline{\text{dérivable}}.}$
Justifions que y_p est dérivable et calculons sa dérivée :

D'où

$$y_p \text{ solution de } (E) \text{ sur } I \iff$$
$$\iff$$
$$\iff$$

Au passage, on a montré :
Théorème :

Une EDL d'ordre 1 a toujours des solutions.

Exemples : $(E_1) : y' + 2xy = e^{-x-x^2}$; $(E_2) : y' - \dfrac{1}{x}y = x^4$

Démonstration 5

3.c Résolution avec condition initiale (problème de Cauchy)

Théorème :

Soit $(E) : y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$ avec a, b $I \to \mathbb{K}$ continues, avec I intervalle.
Pour tout $x_0 \in I$ et pour tout $y_0 \in \mathbb{K}$, il existe une unique solution y de (E) telle que $y(x_0) = y_0$.

Démonstration 6

Vocabulaire : Le système $\begin{cases} y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ s'appelle un <u>problème de Cauchy</u>.

Méthode : Il suffit de résoudre l'ED et de ne s'occuper de la condition initiale qu'à la fin.

Exemple : Résoudre $\begin{cases} y'(x) + 2xy(x) = e^{-x-x^2} \\ y(0) = 2 \end{cases}$.

Démonstration 7

4 Équations différentielles linéaires d'ordre 2 (EDL2) à coefficients constants

4.a Résolution de l'équation homogène associée

Notons (H) : $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$, avec $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$. L'intervalle de définition est $\mathbb{R}$.
On appelle équation caractéristique de (H) (ou de l'équation (E) avec second membre), l'équation d'inconnue $r \in \mathbb{K}$:

$$ar^2 + br + c = 0$$

Théorème : cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

$a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, on cherche les solutions définies sur $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{à valeurs dans } \mathbb{C}}$.

- Si l'équation caractéristique a deux racines distinctes r_1 et r_2 (i.e.),
  alors les solutions de (H) sont les fonctions de la forme :

- Si l'équation caractéristique a une racine double r_1 (i.e.),
  alors les solutions de (H) sont les fonctions de la forme :

Exemples : (E_1) : $y''(x) - 2iy'(x) - y(x) = 0$; (E_2) : $y''(x) - y(x) = 0$.

Théorème : cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, on cherche les solutions définies sur $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{à valeurs dans } \mathbb{R}}$.

- Si l'équation caractéristique a deux racines distinctes réelles r_1 et r_2 (i.e.),
  alors les solutions de (H) sont les fonctions de la forme :

- Si l'équation caractéristique a une racine double réelle r_1 (i.e.),
  alors les solutions de (H) sont les fonctions de la forme :

- Si l'équation caractéristique a deux racines distinctes non réelles r_1 et r_2 (i.e.) :
  Les deux racines sont alors

  Alors les solutions de (H) sont les fonctions de la forme :

Exemples : (E_1) : $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0$; (E_2) : $y''(x) + y'(x) + y(x) = 0$.

Corollaire :

Cas particulier de l'équation $y''(x) + \omega^2 y(x) = 0$ avec $\omega > 0$:
On peut écrire l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ sous les deux formes suivantes :

4.b Cas d'une équation avec second membre

On considère (E) : $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$, avec $f : I \to \mathbb{K}$ continue, I intervalle de $\mathbb{R}$.
On résout l'équation homogène associée, puis on cherche une solution particulière de (E).
Voici trois situations à savoir traiter :

4.b.i Cas où f est une fonction polynomiale Q

On suppose que $f = Q$ est une fonction polynômiale, et $\boxed{\text{on note } n \text{ son degré}}$.
On cherche alors une solution de (E) sous la forme d'une fonction polynômiale P, avec un degré choisi selon que 0 est non racine, racine simple ou racine double de l'équation caractéristique $ar^2+br+c=0$; plus précisément on prend P :

de degré	n	si 0 <u>n'est pas</u> racine de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$
de degré	$n+1$	si 0 est racine <u>simple</u> de cette équation
de degré	$n+2$	si 0 est racine <u>double</u> de cette équation.

Exemple : (E) : $y''(x) + y'(x) - y(x) = x^2 - 1$

- Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second degré à coefficients constants réels, avec second membre, que l'on résout sur $\mathbb{R}$.
- L'équation caractéristique est (K) : $r^2 + r - 1 = 0$, (...) ses racines sont $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
  Donc les solutions de l'équation homogène associée à (E) sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}x} + \mu e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}x}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
- Cherchons une solution particulière de (E) :

Démonstration 8

4.b.ii Cas où $f(x) = Be^{\alpha x}$

On suppose que $f : x \mapsto Be^{\alpha x}$ avec $B \in \mathbb{K}^*$, $\alpha \in \mathbb{K}$.
On cherche alors une solution de (E) avec la même exponentielle que dans ce second membre f, multipliée par A, Ax ou Ax^2 (avec A constante à trouver), selon le que α (coefficient dans l'exponentielle) est non racine, racine simple ou racine double de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$; plus précisément on prend y_p sous la forme :

$x \mapsto A\, e^{\alpha x}$	si α <u>n'est pas</u> racine de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$
$x \mapsto Ax\, e^{\alpha x}$	si α est racine <u>simple</u> de cette équation
$x \mapsto Ax^2\, e^{\alpha x}$	si α est racine <u>double</u> de cette équation.

Exemples : (E_1) : $y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = 2e^{-x}$

- Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second degré à coefficients constants réels, avec second membre, que l'on résout sur $\mathbb{R}$.
- L'équation caractéristique est (K) : $r^2 - 4r + 3 = 0$, (...) ses racines sont 3 et 1.
  Donc les solutions de l'équation homogène associée à (E_1) sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{3x} + \mu e^x$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
- Cherchons une solution particulière de (E_1) :

Démonstration 9

(E_2) : $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = e^x$

- Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second degré à coefficients constants réels, avec second membre, que l'on résout sur $\mathbb{R}$.
- L'équation caractéristique est (K) : $r^2 - 3r + 2 = 0$, (...) ses racines sont 2 et 1.
  Donc les solutions de l'équation homogène associée à (E_2) sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{2x} + \mu e^x$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
- Cherchons une solution particulière de (E_2) :

Démonstration 10

4.b.iii Cas où $f(x) = B\cos(\omega x)$ ou $B\sin(\omega x)$ et a, b, c, et B réels

L'idée est d'utiliser le fait que $\cos(\omega x) = \mathrm{Re}\left(e^{i\omega x}\right)$ et $\sin(\omega x) = \mathrm{Im}\left(e^{i\omega x}\right)$.

Lemme :

> Soient a, b, c des réels, et $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue à valeurs complexes.
> Si y_c est solution de $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$,
> alors $y_p = \mathrm{Re}\,(y_c)$ est solution de $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = \mathrm{Re}\,(f(x))$.
> On a un résultat similaire pour la partie imaginaire.

Démonstration 11

On utilise ce résultat avec $f(x) = Be^{i\omega x}$.
Méthode :

- On trouve une solution particulière y_c de $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = Be^{i\omega x}$ (c.f. paragraphe précédent)
- Alors $\mathrm{Re}(y_c)$ est une solution particulière de $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = B\cos(\omega x)$.
- De même, $\mathrm{Im}(y_c)$ sera une solution particulière de $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = B\sin(\omega x)$.

Exemple : (E) : $y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = \sin(x)$

- Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second degré à coefficients constants réels, avec second membre, que l'on résout sur $\mathbb{R}$.
- L'équation caractéristique est (K) : $r^2 + 2r + 2 = 0$, (...) ses racines sont $-1 + i$ et $-1 - i$.
  Donc les solutions de l'équation homogène associée à (E) sont les fonctions de la forme $x \mapsto e^{-x}\left(\lambda\cos(x) + \mu\sin(x)\right)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
- Cherchons une solution particulière de (E) :

Démonstration 12

4.c Résolution avec condition initiale (problème de Cauchy)

Théorème :

> Soit (E) : $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d(x)$ avec a, b, $c \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$, et $d : I \to \mathbb{K}$ continue, I intervalle.
> Pour tout $x_0 \in I$ et pour tout $(y_0, y_1) \in \mathbb{K}^2$, il existe une unique solution y de (E) telle que $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$.

Vocabulaire : le système $\begin{cases} ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$ s'appelle un problème de Cauchy.

Concrètement, les deux condition initiales déterminent les deux constantes qui interviennent dans la description des solutions. La méthode est la même que pour l'ordre 1 : on commence par résoudre l'équation et on se préoccupe des conditions initiales à la fin.

Exemple : $\begin{cases} y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = \sin(x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

✎ **Démonstration** 13

⚠ Les conditions initiales doivent porter sur y et y', à un même instant x_0 fixé.
Ne pas voir un problème de Cauchy face à des conditions initiales un peu différentes (par exemple $y(x_0) = y_0$ et $y(x_1) = y_1$: rien ne nous assure de l'existence et unicité d'une solution).

Plan du cours