Ch 6 - Démonstrations non faites en classe.

Théorème :

> Soit $(E) : y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$ avec a, b $I \to \mathbb{K}$ continues, avec I intervalle.
> Pour tout $x_0 \in I$ et pour tout $y_0 \in \mathbb{K}$, il existe une unique solution y de (E) telle que $y(x_0) = y_0$.

Démo 6 : Fixons $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$.

D'après la partie 3.b, (E) possède des solutions sur I, notons-en une y_p ; et, en notant A une primitive de a sur I, nous savons que les solutions de (E) sur I sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto y_p(x) + \lambda e^{-A(x)},\ \lambda \in \mathbb{K}.$$

Une telle solution est entièrement déterminée par λ, il suffit donc de prouver qu'il existe une unique constante λ pour laquelle la condition initiale est vérifiée.
On prend donc $\lambda \in \mathbb{K}$ et on note $y : x \mapsto y_p(x) + \lambda e^{-A(x)}$.

$$\begin{aligned} y(x_0) = y_0 &\iff y_p(x_0) + \lambda e^{-A(x_0)} = y_0 \\ &\iff \lambda e^{-A(x_0)} = y_0 - y_p(x_0) \\ &\iff \lambda = (y_0 - y_p(x_0))\, e^{A(x_0)} \end{aligned}$$

La valeur $(y_0 - y_p(x_0))\, e^{A(x_0)}$ est bien une constante (tout est fixé : x_0, y_0, les fonctions y_p et A), d'où le résultat.

Théorèmes de la partie 4.a : EDL2 à coefficients constants homogènes

On considère

$$(H) \ : \ ay'(x) + by'(x) + cy(x) = 0,$$

où a, b, c sont des réels ou des complexes, a non nul.

On note (K) l'équation caractéristique :

$$ar^2 + br + c = 0.$$

Lemme :

> r est racine de (K) si et seulement si $x \mapsto e^{rx}$ est solution de (H).

Démo : Notons, pour tout $r \in \mathbb{C}$, φ_r la fonction : $x \mapsto e^{rx}$.

φ_r est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_r'(x) = re^{rx}, \quad \varphi_r''(x) = r^2 e^{rx}.$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\varphi_r \text{ solution de } (H) &\iff \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0 \\
&\iff \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \left(ar^2 + br + c\right) e^{rx} = 0 \\
&\iff ar^2 + br + c = 0 \quad \text{ car exp ne s'annule jamais}
\end{aligned}$$

Démo du th, cas $\mathbb{C}$: Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ deux fois dérivable.

Soit r_1 l'une des solutions de (K). On note r_2 l'autre racine, éventuellement $r_2 = r_1$ dans le cas $\Delta = 0$.

Posons $\begin{array}{rccc} z : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ & x & \mapsto & y(x)e^{-r_1 x}. \end{array}$

Par produit, z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
y(x) &= z(x)e^{r_1x} \\
y'(x) &= z'(x)e^{r_1x} + z(x)r_1e^{r_1x} = \left(z'(x) + r_1z(x)\right) e^{r_1x} \\
y''(x) &= z''(x)e^{r_1x} + z'(x)r_1e^{r_1x} + z'(x)r_1e^{r_1x} + z(x)r_1^2e^{r_1x} \\
&= \left(z''(x) + 2r_1z'(x) + r_1^2z(x)\right) e^{r_1x}
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
y \text{ solution de } (H) &\iff \forall\, x \in \mathbb{R}, \ a\left(z''(x) + 2r_1z'(x) + r_1^2z(x)\right) e^{r_1x} \\
&\qquad\qquad + b\left(z'(x) + r_1z(x)\right) e^{r_1x} + cz(x)e^{r_1x} = 0 \\
&\iff \forall\, x \in \mathbb{R}, \ a\left(z''(x) + 2r_1z'(x) + r_1^2z(x)\right) \\
&\qquad\qquad + b\left(z'(x) + r_1z(x)\right) + cz(x) = 0 \text{ car exp ne s'annule pas} \\
&\iff \forall\, x \in \mathbb{R}, \ az''(x) + (2ar_1 + b)\, z'(x) + \left(\underbrace{ar_1^2 + br_1 + c}_{0}\right) z(x) = 0
\end{aligned}$$

Or, comme r_1 et r_2 sont les solutions de (K), $r_1 + r_2 = \dfrac{-b}{a}$, d'où $ar_1 + ar_2 = -b$ puis $ar_1 + b = -ar_2$.
Donc $2ar_1 + b = a(r_1 - r_2)$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
y \text{ solution de } (H) &\iff \forall\, x \in \mathbb{R}, az''(x) + a(r_1 - r_2)z'(x) = 0 \\
&\iff \forall\, x \in \mathbb{R}, z''(x) + (r_1 - r_2)z'(x) = 0 \text{ car } a \neq 0 \\
&\longleftrightarrow z' \text{ solution de } (E') : Y' + (r_1 - r_2)Y = 0
\end{aligned}$$

Or les solutions de (E') sont les $x \mapsto \lambda e^{-(r_1 - r_2)x}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. D'où :

$$y \text{ solution de } (H) \iff \exists\, \lambda \in \mathbb{C},\ \forall\, x \in \mathbb{R}, z'(x) = \lambda e^{-(r_1 - r_2)x}$$

- Cas $\Delta \neq 0$ i.e. $r_1 \neq r_2$:

$$\begin{aligned}
&y \text{ solution de } (H) \\
\iff& \exists\, \lambda \in \mathbb{C},\ \exists\, \mu \in \mathbb{C},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\quad z(x) = \frac{\lambda}{r_2 - r_1} e^{(r_2 - r_1)x} + \mu \\
\iff& \exists\, \lambda \in \mathbb{C},\ \exists\, \mu \in \mathbb{C},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\quad y(x) = \frac{\lambda}{r_2 - r_1} e^{(r_2 - r_1)x} e^{r_1 x} + \mu e^{r_1 x} \\
&\qquad \text{car } z(x) = y(x)e^{-r_1 x} \\
\iff& \exists\, \lambda \in \mathbb{C},\ \exists\, \mu \in \mathbb{C},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\quad y(x) = \frac{\lambda}{r_2 - r_1} e^{r_2 x} + \mu e^{r_1 x} \\
\iff& \exists\, \lambda \in \mathbb{C},\ \exists\, \mu \in \mathbb{C},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\quad y(x) = \lambda e^{r_2 x} + \mu e^{r_1 x}
\end{aligned}$$

  car, lorsque λ décrit $\mathbb{R}$, $\dfrac{\lambda}{r_2 - r_1}$ décrit $\mathbb{R}$, et réciproquement.
- Cas $\Delta = 0$: $r_1 = r_2$.

$$\begin{aligned}
y \text{ solution de } (H) &\iff \exists\, \lambda \in \mathbb{C},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\quad z'(x) = \lambda \\
&\iff \exists\, \lambda \in \mathbb{C},\ \exists\, \mu \in \mathbb{C},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\quad z(x) = \lambda x + \mu \\
&\iff \exists\, \lambda \in \mathbb{C},\ \exists\, \mu \in \mathbb{C},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\quad y(x) = (\lambda x + \mu)e^{r_1 x}
\end{aligned}$$

Démo du th, cas $\mathbb{R}$:

- Cas $\Delta > 0$ et $\Delta = 0$: même démo que dans le cas complexe, sauf que les constantes λ et μ décrivent $\mathbb{R}$ et non $\mathbb{C}$.
- Cas $\Delta < 0$: On a $r_1 = \alpha + i\omega$ et $r_2 = \alpha - i\omega$, avec α, ω réels, $\omega \neq 0$. On connaît donc les solutions de (H) à valeurs complexes.
  Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable.

$$
\begin{aligned}
& y \text{ solution de } (H) \text{ à valeurs réelles} \\
\Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} y \text{ solution de } (H) \text{ à valeurs complexes} \\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) \in \mathbb{R} \end{array} \right. \\
\Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \exists\,(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \lambda e^{(\alpha+i\omega)x} + \mu e^{(\alpha-i\omega)x} \\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) \in \mathbb{R} \end{array} \right. \\
\Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \exists\,(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \lambda e^{\alpha x} e^{i\omega x} + \mu e^{\alpha x} e^{-i\omega x} \\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) \in \mathbb{R} \end{array} \right. \\
\Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \exists\,(A,B,C,D) \in \mathbb{R}^4,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = e^{\alpha x}\left[(A+iB)e^{i\omega x} + (C+iD)e^{-i\omega x}\right] \\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) \in \mathbb{R} \end{array} \right. \\
\Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \exists\,(A,B,C,D) \in \mathbb{R}^4,\ \forall x \in \mathbb{R}, \\ y(x) = e^{\alpha x}\left[(A+iB)\left(\cos(\omega x) + i\sin(\omega x)\right) + (C+iD)\left(\cos(\omega x) - i\sin(\omega x)\right)\right] \\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) \in \mathbb{R} \end{array} \right. \\
\Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \exists\,(A,B,C,D) \in \mathbb{R}^4,\ \forall x \in \mathbb{R}, \\ y(x) = e^{\alpha x}\left[A\cos(\omega x) - B\sin(\omega x) + C\cos(\omega x) + D\sin(\omega x)\right] \\ \qquad + ie^{\alpha x}\left[B\cos(\omega x) + A\sin(\omega x) + D\cos(\omega x) - C\sin(\omega x)\right] \\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) \in \mathbb{R} \end{array} \right. \\
\Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \exists\,(A,B,C,D) \in \mathbb{R}^4,\ \forall x \in \mathbb{R}, \\ y(x) = e^{\alpha x}\left[(A+C)\cos(\omega x) + (D-B)\sin(\omega x)\right] \\ \qquad + ie^{\alpha x}\left[(B+D)\cos(\omega x) + (A-C)\sin(\omega x)\right] \\ \forall x \in \mathbb{R},\ e^{\alpha x}\left[(B+D)\cos(\omega x) + (A-C)\sin(\omega x)\right] = 0 \end{array} \right. \\
\Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \exists\,(A,B,C,D) \in \mathbb{R}^4,\ \forall x \in \mathbb{R}, \\ y(x) = e^{\alpha x}\left[(A+C)\cos(\omega x) + (D-B)\sin(\omega x)\right] \\ \qquad + ie^{\alpha x}\left[(B+D)\cos(\omega x) + (A-C)\sin(\omega x)\right] \\ \forall x \in \mathbb{R},\ (B+D)\cos(\omega x) + (A-C)\sin(\omega x) = 0 \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

  Notons $(*)$: $\forall x \in \mathbb{R},\ (B+D)\cos(\omega x) + (A-C)\sin(\omega x) = 0$.
  Clairement, $\left\{ \begin{array}{l} B+D=0 \\ A-C=0 \end{array} \right. \Longrightarrow (*)$.
  Réciproquement, si $(*)$ est vérifiée, alors pour $x = 0$ on trouve $B + D = 0$; et pour $x = \dfrac{\pi}{2\omega}$, on trouve $A - C = 0$.
  Finalement,

$$
(*) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} B+D=0 \\ A-C=0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} D=-B \\ C=A \end{array} \right.
$$

  D'où :

$$
\begin{aligned}
& y \text{ solution de } (H) \text{ à valeurs réelles} \\
\Longleftrightarrow & \exists\,(A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\quad y(x) = e^{\alpha x}\left[2A\cos(\omega x) - 2B\sin(\omega x)\right] \\
\Longleftrightarrow & \exists\,(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\quad y(x) = e^{\alpha x}\left[\lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x)\right]
\end{aligned}
$$

  Car, si A décrit $\mathbb{R}$, $2A$ décrit $\mathbb{R}$, et réciproquement ; idem avec $-2B$.