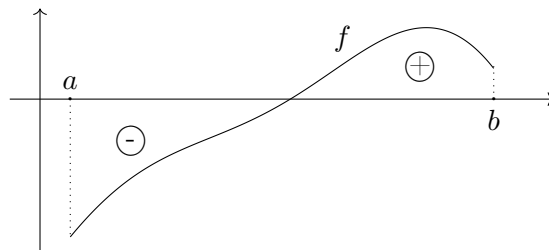


## Chapitre 5. Primitives.

### Prérequis de Terminale sur la notion d'intégrale

Pour  $I$  intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f$  continue sur  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , et  $a$  et  $b$  des éléments de  $I$ , l'intégrale  $\int_a^b f(x) dx$  est "définie" provisoirement de la manière suivante :

- Si  $a < b$ ,  $\int_a^b f(x) dx$  est l'aire algébrique sous la courbe représentative de  $f$  :



- Si  $a = b$ ,  $\int_a^a f(x) dx = 0$
- Si  $a > b$ ,  $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$ .

Le nom de la variable d'intégration est muet :  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du = \dots$

Pour une fonction à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , l'intégrale est définie en passant par les parties réelle et imaginaire : c.f. ch 4.

Il y a quatre propriétés de base pour l'intégrale :

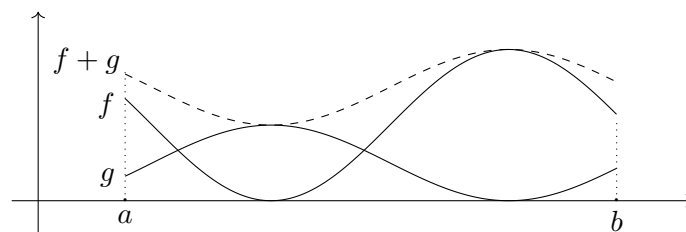
#### Proposition :

##### Linéarité

Soient  $a$  et  $b$  des réels tels que  $a \leq b$ , et des fonctions  $f$  et  $g$  continues sur un segment  $[a, b]$ , à valeurs réelles ou complexes. Pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,

$$\int_a^b (\lambda f(x) + g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

Encore valable pour  $a > b$  et des fonctions continues sur  $[b, a]$ .



**Proposition :**

**Positivité**

Soient  $a$  et  $b$  des réels tels que  $a \leq b$ , et une fonction  $f$  continue sur un segment  $[a, b]$ , à valeurs réelles ou complexes.

$$\text{Si pour tout } x \in [a, b], \quad f(x) \geq 0, \text{ alors } \int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

⚠ faux si  $a > b$  !

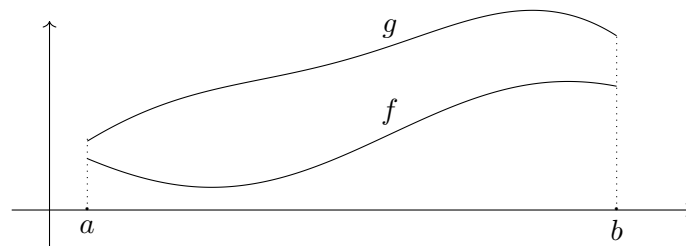
**Proposition :**

**Croissance**

Soient  $a$  et  $b$  des réels tels que  $a \leq b$ , et des fonctions  $f$  et  $g$  continues sur un segment  $[a, b]$ , à valeurs réelles ou complexes.

$$\text{Si pour tout } x \in [a, b], \quad f(x) \leq g(x), \text{ alors } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

⚠ faux si  $a > b$  !



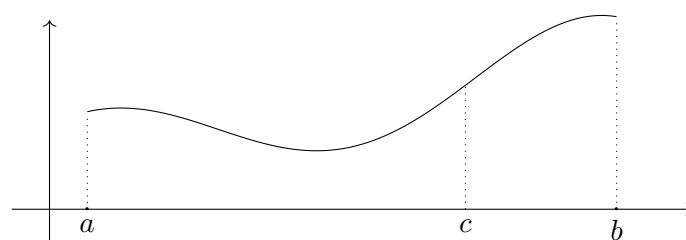
**Proposition :**

• **Relation de Chasles**

Soient  $a$ ,  $b$  et  $c$  des réels tels que  $a \leq c \leq b$ , et une fonction  $f$  continue sur un segment  $[a, b]$ , à valeurs réelles ou complexes.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

C'est encore valable dès que les trois intégrales existent, i.e.  $f$  continue sur le segment formé par  $a$  et  $b$ , sur le segment formé par  $a$  et  $c$  et par le segment formé par  $c$  et  $b$ .



## Nouvel outil pour montrer des inégalités

Avec la propriété de croissance de l'intégrale ; par exemple, partons du fait que :  $\forall t \in \mathbb{R}_+, 0 \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$  :

### Remarque : justification de l'existence d'une intégrale

Parfois, on vous demandera de justifier qu'une intégrale existe. Il y a deux points fréquemment oubliés :

- Bien dire que la fonction sous l'intégrale est continue...
- et ce, sur tout le segment formé par les deux bornes !

Par exemple, justifions que pour tout  $x \in ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$ , l'intégrale  $\int_x^{x^2} \frac{\ln(t)}{1-t} dt$  existe :

## 1 Généralités sur les primitives, lien primitive-intégrale

$\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### 1.a Définition des primitives

#### Définition :

Soit  $D$  une partie de  $\mathbb{R}$  et  $f : D \rightarrow \mathbb{K}$ .

On dit que  $F : D \rightarrow \mathbb{K}$  est une primitive de  $f$  sur  $D$  si

#### Exemples :

- La fonction  $-\cos$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , de dérivée  $\sin$ , donc une primitive de  $\sin$  sur  $\mathbb{R}$  est  $-\cos$ .
- Une primitive de  $x \mapsto x$  sur  $\mathbb{R}$  est
- **À connaître** :  $f : x \mapsto \ln(|x|)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  de dérivée  $x \mapsto \frac{1}{x}$ .

Autrement dit,



Démonstration 1

**Proposition :**

Si  $F$  est une primitive de  $f$  sur l'intervalle  $I$ , alors :

- L'ensemble des primitives de  $f$  est l'ensemble des fonctions de la forme  $x \mapsto F(x) + C$ , avec  $C \in \mathbb{K}$  constante.
- Pour tout  $x_0 \in I$  et  $y_0 \in \mathbb{K}$ , il existe une unique primitive  $F$  de  $f$  sur  $I$  telle que  $F(x_0) = y_0$ .

**Démonstration 2**

En particulier, lorsqu'on fixe  $x_0 \in I$  et qu'on sait que  $f$  a des primitives sur  $I$ , alors on peut affirmer qu'il y en a une et une seule qui s'annule en  $x_0$ .

⚠ Il peut ne pas y avoir de primitives : certaines fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  n'admettent pas de primitives.

⚠ On ne dit jamais "la" primitive mais "une" primitive. En effet, sur un intervalle : s'il existe une primitive, alors il en existe une infinité et toutes les primitives sont égales à une constante près.

⚠ La proposition n'est plus valable si on n'est pas sur un intervalle.

Par exemple, voici deux primitives de  $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$  sur  $\mathbb{R}^* = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$  :

- $F : x \mapsto \frac{1}{x}$
- $G : x \mapsto$

Pourtant,  $F$  et  $G$  ne sont pas égales à une constante près :  $G(x) - F(x) =$

**Méthode : "primitiver une égalité"**

Complétons : pour une fonction  $f : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable,

$$\forall x \in ]-1, 1[, f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \iff$$

$$\iff$$

**1.b Primitives usuelles**

À partir des dérivées "usuelles", on tire des primitives "usuelles", à parfaitement connaître : c.f. fiche.

Exemples :

- Déterminer une primitive, sur un intervalle à déterminer, de  $f : x \mapsto \frac{\sin x}{\sqrt{5+3\cos x}}$ .

- Déterminer une primitive, sur un intervalle à déterminer, de  $\tan$ .

## 1.c Existence de primitives pour les fonctions continues

**Théorème :**

(Théorème fondamental de l'analyse)

Soit  $I$  un intervalle, et  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  continue.

Soit  $a \in I$ .

Autrement dit,

**Conséquence :** Toute fonction  $f$  continue sur un intervalle  $I$  admet des primitives sur  $I$

Exemples :

- Nous avons défini la fonction  $\ln$  comme  $\ln : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$   
$$x \mapsto \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

autrement dit :

- Soit  $F : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$ .

### Méthode

Lorsqu'on vous demande de calculer une primitive d'une fonction  $f$  continue sur un intervalle :

- Ou bien c'est direct (c.f. fiches primitives usuelles)
- Ou bien on fixe une constante  $a$  dans  $I$ , et on calcule une intégrale  $\int_a^x f(t) dt$  pour tout  $x \in I$ .  
Le choix du  $a \in I$  importe peu : si on prend un  $a \in I$  différent, on aura simplement une constante différente à la fin du calcul. Pour cette raison, on trouve parfois l'écriture  $\int^x f(t) dt$ .

On trouve aussi  $\int f(x) dx$ , à éviter.

## 2 Outils pour calculer une intégrale

### 2.a Calcul direct à l'aide d'une primitive

En conséquence du théorème fondamental de l'analyse :

**Corollaire :**

Soit  $f$  une fonction continue sur  $I$  et  $a, b$  des éléments de  $I$ .

Alors, en notant  $F$  une primitive de  $f$  sur  $I$ ,

$$\int_a^b f(t) dt =$$



Démonstration 3

**Exemples :**

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_a^b e^{2x} dx \text{ où } (a, b) \in \mathbb{R}^2 & I_2 &= \int_0^\pi \sin t dt & I_3 &= \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx \\ I_4 &= \int_0^1 \frac{1}{1+u^2} du & I_5 &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} dv & I_6 &= \int_0^3 \frac{x}{1+x} dx & I_7 &= \int_1^2 \frac{1}{x(1+x^2)} dx \end{aligned}$$



#### Démonstration 4

Retenir la "technique de l'apparition-disparition" dans les derniers exemples qui permet de simplifier beaucoup de situations (cela peut être  $-1 + 1$ ,  $-2 + 2$ ,  $-x + x\dots$ ).

## 2.b Intégration Par Parties (IPP)

**Définition :**

Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{K}$ .

On dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $D$  si  $f$  est dérivable sur  $D$  et si  $f'$  est continue sur  $D$ .

**Exemples :**

**Remarque :** Si  $f$  est une fonction continue sur un intervalle  $I$  alors toute primitive de  $f$  sur  $I$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ . En effet :

**Théorème :**

Soit  $I$  un intervalle, et  $a, b$  des éléments de  $I$ . Soient  $f, g$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ .



#### Démonstration 5

**Exemples :**

- Calculer  $I = \int_0^1 t e^{2t} dt$ .
- Les primitives de  $\ln$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  sont les fonctions de la forme



#### Démonstration 6

⚠ Les phrases suivantes n'ont pas le même sens et sont insuffisantes :

"Les primitive de  $\ln$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  sont de la forme  $x \mapsto x \ln(x) - x + C, C \in \mathbb{R}$ "

"Les fonctions de la forme  $x \mapsto x \ln(x) - x + C, C \in \mathbb{R}$  sont des primitives de  $\ln$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ "

Autres manières de le dire :

L'ensemble des primitives de  $\ln$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  est  $\{x \mapsto x \ln x - x + C / C \in \mathbb{R}\}$

⚠ Ne pas écrire :  $\{x \ln x - x + C / C \in \mathbb{R}\}$

$F$  primitive de  $\ln$  sur  $\mathbb{R}_+^* \iff \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, F(x) = x \ln(x) - x + C$

⚠ Ne pas écrire :  $F$  primitive de  $\ln$  sur  $\mathbb{R}_+^* \iff F(x) = x \ln(x) - x + C, C \in \mathbb{R}$

## 2.c Changement de variable

**Théorème :**

Soient  $I$  et  $J$  des intervalles,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue,  $\varphi : J \rightarrow I$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , et  $\alpha, \beta$  des éléments de  $J$ .



**Démonstration 7**

Cette formule complète est à connaître, elle sert dans certains exercices.

Sur les calculs d'intégrale ou de primitive, on a des moyens "simples" pour l'appliquer. Pour calculer une intégrale  $I$ , on l'identifie soit au membre de gauche de l'égalité, soit au membre de droite de l'égalité.

**Exemples :**

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{t}{1+4t^4} dt \quad I_2 = \int_0^\pi \frac{\sin t}{3+\cos^2 t} dt \quad I_3 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$



**Démonstration 8**

Ainsi, retenir qu'on écrit formellement :

- On pose  $x = \varphi(t)$  ; la fonction  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $J$ .
- On a  $dx = \varphi'(t) dt$ .
- Si  $t = \alpha$  alors  $x = \varphi(\alpha)$  ;  
Si  $t = \beta$  alors  $x = \varphi(\beta)$ .

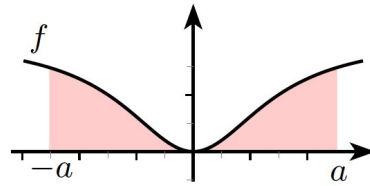
## 2.d Conséquences du changement de variable

### Proposition :

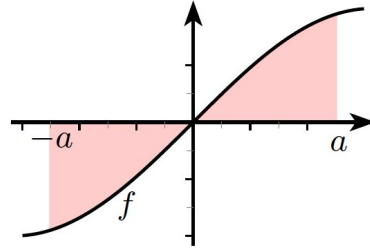
Pour  $f$  continue et  $a \in \mathbb{R}$  :

- Si  $f$  est paire,

$$\int_{-a}^a f(x) dx =$$



- Si  $f$  est impaire,  $\int_{-a}^a f(x) dx =$

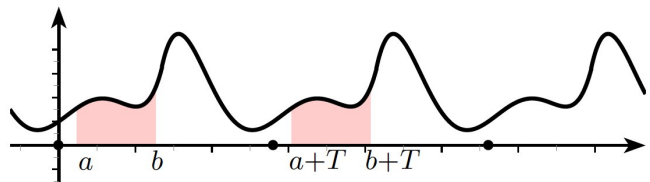


### Démonstration 9

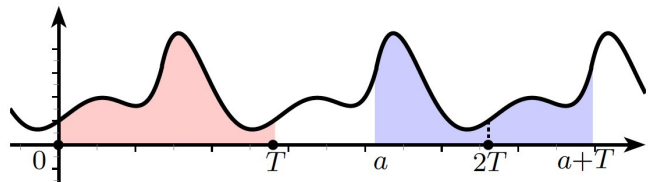
### Proposition :

Si  $f$  est périodique de période  $T > 0$ ,

- $\int_{a+T}^{b+T} f(x) dx =$



- $\underbrace{\int_a^{a+T} f(x) dx}_{\text{intégrale de } f \text{ sur...}} =$



### Démonstration 10

**Exemple :** Calculons  $\int_0^{2\pi} \cos(3t) \sin(t) dt$



### 3 Des exemples à savoir traiter

**3.a**  $\boxed{\int_a^b e^{\alpha x} \cos(\omega x), \int_a^b e^{\alpha x} \sin(\omega x)}$

Il y a deux méthodes, à connaître : double intégration par parties ou passage par les complexes (plus rapide).

**Exemple** :  $I = \int_0^\pi e^{3t} \cos(t) dt.$



**Démonstration 11**

**3.b**  $\boxed{\int_a^b P(x) \cos(\omega x), \int_a^b P(x) \sin(\omega x), \int_a^b P(x) e^{\omega x}} \dots \text{avec } P \text{ polynôme}$

On effectue des intégrations par parties successives pour se ramener à un polynôme de degré de plus en plus petit, jusqu'à une constante.

**Exemple** : Déterminer les primitives de  $x \mapsto x^2 \cos(x)$  sur  $\mathbb{R}$ .



**Démonstration 12**

#### 3.c Primitives de quelques fractions rationnelles particulières

Une fraction rationnelle est une expression de la forme  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ , avec  $P$  et  $Q$  des polynômes.

Cherchons une primitive  $F$  de  $f$  (sur  $I$  intervalle à préciser), dans quelques cas particuliers :

**3.c.i**  $\boxed{f(x) = \frac{1}{x-a}}$  avec  $a \in \mathbb{R}$

**3.c.ii**  $\boxed{f(x) = \frac{1}{(x-a)^n}}$  avec  $a \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}^*, n \neq 1$

Exemples :  $f(x) = \frac{1}{(x-a)^2} :$

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)^3} :$$

Plus généralement, si  $f(x) = \frac{1}{(x-a)^n}$  avec  $n \neq 1$  :

**3.c.iii**  $\boxed{f(x) = \frac{1}{ax^2 + bx + c}}$  avec  $a \neq 0$ ,  $a, b, c$  réels

Méthode : il faut déterminer si le polynôme  $ax^2 + bx + c$  a des racines réelles ou non. On peut par exemple calculer son discriminant.

- Si  $\Delta = 0$ , on a une unique racine  $x_0$ , et  $f(x) = \frac{cste}{(x - x_0)^2}$ , on est ramené au cas précédent.

- Si  $\Delta > 0$ , on a des racines réelles distinctes  $x_1$  et  $x_2$ , et on est ramené à  $\boxed{f(x) = \frac{cste}{(x - x_1)(x - x_2)}}$

On "décompose en éléments simples", i.e. on trouve des constantes  $a$  et  $b$  telles que :

$$\frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{a}{x - x_1} + \frac{b}{x - x_2} \quad \text{pour tout } x \text{ différent de } x_1 \text{ et } x_2.$$

**Exemples :**  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}$  ;  $g(x) = \frac{1}{x(x - 1)}$ .



**Démonstration 13**

- Si  $\Delta < 0$  :  
 — Un cas particulier :  $\boxed{f(x) = \frac{1}{x^2 + \alpha^2}}$  avec  $\alpha > 0$

- Si on n'est pas dans ce cas particulier, on s'y ramène en mettant  $\boxed{ax^2 + bx + c}$  sous forme canonique.

**Méthode :**

Factoriser par  $a$ , puis de voir les termes  $x^2 + \frac{b}{a}x$  comme le début d'une identité remarquable ;

On obtient la forme  $a(X^2 + cste^2)$ , factoriser encore pour avoir  $\lambda(Y^2 + 1)$  avec  $\lambda$  cste.

**Exemples :**  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$  ;  $g(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 8}$ .



**Démonstration 14**

### 3.d Des pistes pour trouver un changement de variable "qui marche"

On souhaite calculer  $\int_a^b f(x) dx$ .

À maîtriser :

- Si  $f(x)$  est un polynôme en cos, sin : on peut linéariser.

**Exemples** :  $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt$  ;  $I_2 = \int_0^{\pi} \cos^3(x) \sin(x) dx$ .



**Démonstration 15**

- Cependant, de façon plus générale avec un polynôme ou une fraction rationnelle en cos, sin, tan, il y a souvent un changement de variable naturel parmi :

$$\begin{array}{ccc} u = \cos(x) & u = \sin(x) & u = \tan x \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ du = -\sin(x) dx & du = \cos(x) dx & du = \frac{1}{\cos^2 x} dx \end{array}$$

Par exemple, dans l'intégrale  $I_2$  précédente :



**Démonstration 16**

**Exemple** :  $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1 - \sin(x)}{\cos(x) + \sin(2x)} dx$ .



**Démonstration 17**

Pour aller plus loin :

- Si  $f(x)$  ne fait intervenir que des  $e^x$ ,  $e^{-x}$ ,  $e^{2x}$ ... (pas de  $x$  seul ou d'autres fonctions), poser  $u = e^x$  (ou  $u = e^{-x}$ ...)
- Si  $f(x)$  ne fait intervenir que  $x$  et  $\sqrt{ax+b}$ , poser  $u = \sqrt{ax+b}$
- Si  $f(x)$  ne fait intervenir que  $x$  et  $\sqrt{ax^2+bx+c}$  :

Exemple vu :  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ .

— On met  $ax^2+bx+c$  sous forme canonique, en voyant  $ax^2+bx$  comme le début d'un carré  $a(x+cste)^2$ .

On trouvera toujours l'une des trois formes canoniques suivantes :

$$\lambda(1-X^2) \quad ; \quad \lambda(1+X^2) \quad ; \quad \lambda(X^2-1) \quad \text{avec } \lambda > 0$$

— Selon le cas, on pose  $X = \cos u$  ou  $X = \sin u$  ou  $X = \operatorname{sh} u$  ou  $X = \operatorname{ch} u$ ...

Le but étant d'utiliser la relation  $\cos^2 u + \sin^2 u = 1$  ou  $\operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh}^2 u = 1$  pour obtenir  $\sqrt{(\operatorname{truc})^2}$  qui se simplifie...

# Plan du cours

<b>1</b>	<b>Généralités sur les primitives, lien primitive-intégrale</b>	<b>3</b>
1.a	Définition des primitives . . . . .	3
1.b	Primitives usuelles . . . . .	4
1.c	Existence de primitives pour les fonctions continues . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Outils pour calculer une intégrale</b>	<b>5</b>
2.a	Calcul direct à l'aide d'une primitive . . . . .	5
2.b	Intégration Par Parties (IPP) . . . . .	6
2.c	Changement de variable . . . . .	7
2.d	Conséquences du changement de variable . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Des exemples à savoir traiter</b>	<b>9</b>
3.a	$\int_a^b e^{\alpha x} \cos(\omega x), \int_a^b e^{\alpha x} \sin(\omega x)$ . . . . .	9
3.b	$\int_a^b P(x) \cos(\omega x), \int_a^b P(x) \sin(\omega x), \int_a^b P(x)e^{\omega x}$ ... avec $P$ polynôme . . . . .	9
3.c	Primitives de quelques fractions rationnelles particulières . . . . .	9
3.c.i	$f(x) = \frac{1}{x-a}$ avec $a \in \mathbb{R}$ . . . . .	9
3.c.ii	$f(x) = \frac{1}{(x-a)^n}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*, n \neq 1$ . . . . .	9
3.c.iii	$f(x) = \frac{1}{ax^2 + bx + c}$ avec $a \neq 0, a, b, c$ réels . . . . .	10
3.d	Des pistes pour trouver un changement de variable "qui marche" . . . . .	11