

## Chapitre 4. Complexes : fiche découverte.

### Introduction

Pour résoudre une équation de la forme  $ax^2 + bx + c = 0$ , avec  $a, b, c$  réels fixés et  $a \neq 0$ , on calcule le discriminant de l'équation  $b^2 - 4ac$ , noté  $\Delta$ .

- Si  $\Delta \geq 0$  :

Les solutions, éventuellement confondues, sont  $\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$  et  $\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ , autrement dit,  $\frac{-b + \delta}{2a}$  et  $\frac{-b - \delta}{2a}$  en posant  $\delta = \sqrt{\Delta}$ .

Cependant, en posant  $\delta = -\sqrt{\Delta}$ , les solutions sont également les nombres  $\frac{-b + \delta}{2a}$  et  $\frac{-b - \delta}{2a} \dots$

Bref, les solutions sont  $\frac{-b \pm \delta}{2a}$ , avec  $\delta$  désignant n'importe quel nombre vérifiant  $\delta^2 = \Delta$  (c'est ce qu'on appelle une racine carrée de  $\Delta$ ).

- Si  $\Delta < 0$ , il n'y a pas de solution réelle...

D'où l'idée d'introduire de nouveaux nombres dont le carré serait négatif, pour traiter le cas  $\Delta < 0$ .

On va montrer qu'un trinôme du second degré  $ax^2 + bx + c$  admet toujours deux racines dans  $\mathbb{C}$  (éventuellement confondues).

Mieux : nous verrons plus tard dans l'année que tout polynôme de degré  $n$  admet  $n$  racines dans  $\mathbb{C}$ ...

### 1 Présentation de $i$ , de $\mathbb{C}$ , de la forme algébrique

On admet l'existence d'un nombre noté  $i$  vérifiant :

$$i^2 = -1$$

et  $\mathbb{C}$  désigne alors l'ensemble des nombres de la forme :

$$x + iy \quad \text{avec } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}.$$

On utilise souvent la lettre  $z$  pour désigner un nombre complexe, mais ce n'est pas une obligation.

Dans l'écriture ci-dessus, on peut prendre  $y = 0$ , donc tous les réels  $x$  sont dans  $\mathbb{C}$  : ainsi l'ensemble  $\mathbb{C}$  contient l'ensemble  $\mathbb{R}$ .

L'écriture d'un complexe  $z$  sous la forme  $x + iy$  avec  $x$  et  $y$  réels s'appelle la forme algébrique de  $z$ , elle est unique ; le réel  $x$  s'appelle la partie réelle de  $z$  et le réel  $y$  s'appelle la partie imaginaire de  $z$ .

## Somme et produit

Dans  $\mathbb{C}$ , on a une loi  $+$  et une loi  $\times$ , avec les mêmes propriétés que dans  $\mathbb{R}$ . Par exemple :

$$(2 + 3i) + (-1 + 4i) = 1 + 7i$$

Pour le produit, c'est tout aussi facile, en faisant attention au fait que  $i^2 = -1$  :

$$\begin{aligned}(2 + 3i) \times (-1 + 4i) &= 2 \times (-1) + 2 \times 4i + 3i \times (-1) + 3i \times 4i \\ &= -2 + 8i - 3i + 12i^2 \\ &= -2 + 5i - 12 \\ &= -14 + 5i\end{aligned}$$



**Exercice 1.** Mettre sous forme algébrique les complexes suivants :

1°)  $(2 + 6i)(5 + i)$

3°)  $(1 - 2i)(1 + 2i)$

2°)  $(1 + i)^2$

4°)  $(2 - 3i)^3$

## Inverse

De façon générale, pour  $x$  et  $y$  réels,  $(x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2$ .

Cela permet de calculer l'inverse de  $x + iy$  sous forme algébrique, en multipliant au numérateur et au dénominateur par  $x - iy$  :

$$\frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \quad (\text{c'est bien la forme algébrique : } \underbrace{\frac{x}{x^2 + y^2}}_{\text{réel}} + i \underbrace{\frac{-y}{x^2 + y^2}}_{\text{réel}})$$



**Exercice 2.** Mettre sous forme algébrique les complexes suivants :

1°)  $\frac{1}{3 - i}$

3°)  $\frac{1}{i}$

2°)  $\frac{2 - 3i}{5 + 2i}$

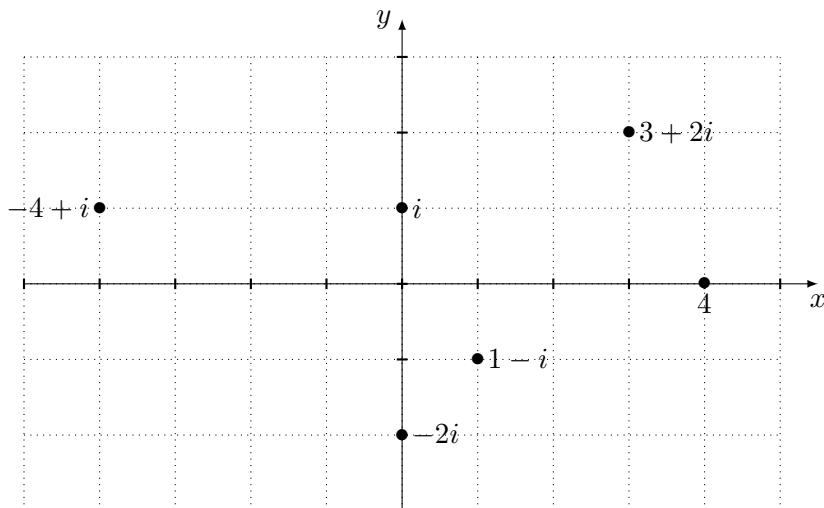
4°)  $\frac{1 + 2i}{3 - 4i}$

## Interprétation géométrique

Tout complexe  $z$  s'écrit de façon unique sous la forme algébrique  $z = x + iy$  avec  $x$  et  $y$  des réels, ce qui permet de lui associer le point  $M$  du plan de coordonnées  $(x, y)$ .

Ainsi, on peut même identifier l'ensemble  $\mathbb{C}$  et le plan.

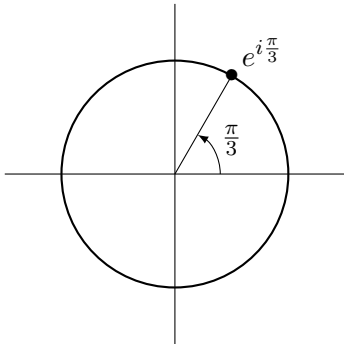
Voici quelques exemples :



## 2 Présentation des nombres $e^{i\theta}$ et de la forme trigonométrique

Si on identifie encore les points du plan et les nombres complexes, on peut s'intéresser aux points du cercle trigonométrique : leurs coordonnées sont de la forme  $(\cos(\theta), \sin(\theta))$  avec  $\theta \in \mathbb{R}$ . Le complexe associé sera alors  $\cos(\theta) + i\sin(\theta)$  ; de façon étrange au premier abord, on va noter ce nombre  $e^{i\theta}$  !!

Pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ , on note :  $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$



Par exemple,  $e^{i\pi/3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ .



**Exercice 3.** Compléter les égalités suivantes, et placer les nombres correspondants sur le cercle trigonométrique :

1°)  $e^{i\pi/4} =$

2°)  $e^{i\pi/6} =$

3°)  $e^{i2\pi/3} =$

4°)  $e^{i\pi/2} =$

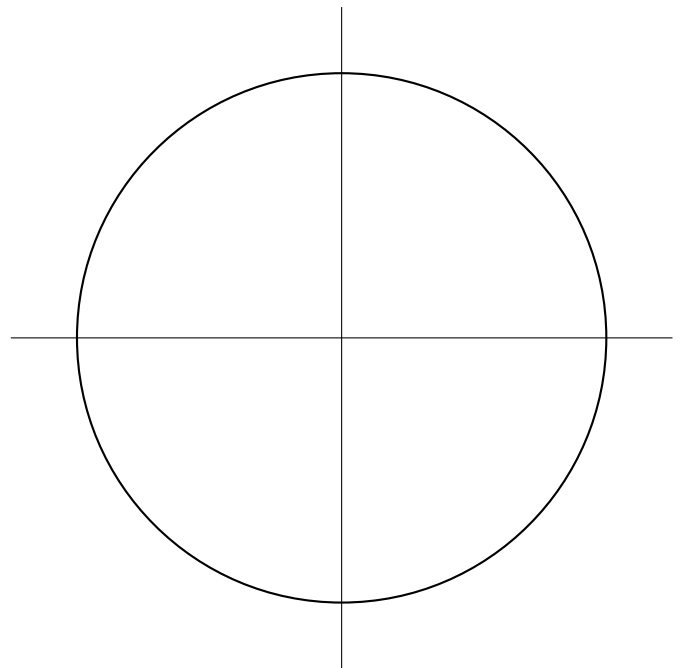
5°)  $e^{i0} =$

6°)  $\quad = -1$

7°)  $\quad = -i$

8°)  $\quad = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$

9°)  $\quad = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$

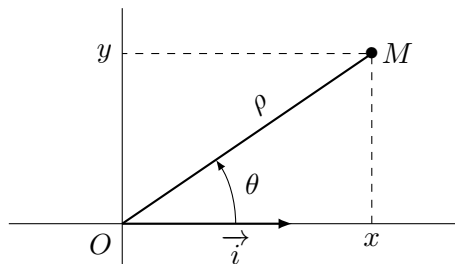


### Forme trigonométrique d'un complexe non nul

Soit  $z$  un complexe non nul, il s'écrit sous forme algébrique  $z = x + iy$ , avec  $x$  et  $y$  réels, qui sont les coordonnées du point  $M$  associé.

La distance  $OM$  vaut donc  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ , et en notant  $\theta$  l'angle entre le vecteur  $\vec{i}$  et le vecteur  $\overrightarrow{OM}$  :

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases}$$



$$\text{Donc } z = \rho \cos(\theta) + i\rho \sin(\theta)$$

Ainsi le complexe non nul  $z$  peut s'écrire sous la forme dite trigonométrique :

$$z = \rho (\cos(\theta) + i \sin(\theta)) = \rho e^{i\theta}, \text{ avec } \rho > 0 \text{ et } \theta \in \mathbb{R}.$$

Par exemple, avec  $z = 1 + i\sqrt{3}$ , on a  $z = 2 \left( \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ .

#### Méthode

Dans cet exemple, la valeur de  $\rho$  se trouvait "à vue" en essayant de faire apparaître un nombre  $e^{i\theta}$  "connu". Mais on aurait pu procéder ainsi :

- On trouve la valeur de  $\rho$  grâce à la formule  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ , avec  $x$  la partie réelle de  $z$  et  $y$  la partie imaginaire de  $z$ .
- Puis on met artificiellement  $\rho$  en facteur dans l'écriture algébrique de  $z$ , et on espère reconnaître  $\cos(\theta) + i \sin(\theta)$  avec un angle  $\theta$  remarquable.



**Exercice 4.** Déterminer la forme trigonométrique des complexes non nuls suivants :

1°)  $4\sqrt{3} + 4i$

4°)  $2i$

2°)  $1 - i$

5°)  $-5i$

3°)  $-\frac{1}{3} - \frac{i}{3}$

6°)  $7$

7°)  $-3$