Chapitre 1.A. Méthodes de base en analyse.

Instructions pour les cours :
Il y a de nombreux "trous" à compléter, des exemples à faire, des schémas et des graphes à dessiner.
Tout ce qui est écrit au tableau doit se retrouver sur votre poly.
Vous devez également prendre une feuille double à côté pour écrire les démonstrations (et parfois des exemples longs). Ce qui doit être écrit sur ces feuilles supplémentaires est indiqué par le symbole ✎

Quelques notations dont on reparlera en profondeur au chapitre 2 :
$\exists$ signifie "il existe" : par exemple, $\exists\, x \in \mathbb{R},\ x^2 = 2$.
$\forall$ signifie "pour tout" ou "quel que soit" : par exemple, $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$.

1 Relation $\leq$ dans $\mathbb{R}$, valeur absolue

1.a Manipulation des inégalités

Proposition :

La relation $\leq$ sur l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ a les propriétés suivantes :
Pour tous réels x, y, z,

- (Réflexivité) $x \leq x$.
- (Transitivité) Si $x \leq y$ et $y \leq z$, alors $x \leq z$.
- (Antisymétrie) Si $x \leq y$ et $y \leq x$, alors $x = y$.

Ces trois propriétés font de $\leq$ une relation d'ordre.
On dit que c'est une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}$ car on peut toujours comparer deux réels x et y : on a soit $x \leq y$, soit $y \leq x$.

Proposition :

Soient x, y, z, t des réels.

- Somme d'inégalités :
- Multiplication d'une inégalité par un réel :

  Multiplication de deux inégalités :
- Passage à l'inverse :

Ces propriétés restent vraies si l'on remplace les inégalités larges par des inégalités strictes.

On peut parfois avoir un peu mieux ; par exemple, dans la propriété pour les sommes, il suffit d'avoir une seule inégalité stricte pour obtenir le "strict" à la fin :

⚠ N'inventez pas de règle pour soustraire les inégalités ! Exemple :

Toujours multiplier par -1 l'inégalité (cela change le sens de l'inégalité), et faire une somme (de deux $\leq$ ou de deux $\geq$).

⚠ De même, on ne peut pas diviser des inégalités. Il faudra d'abord passer l'une des inégalités à l'inverse pour ensuite les multiplier.

Exemple : Encadrer, pour x entre 1 et 2, $\dfrac{2x+1}{3x^2+4}$.

Démonstration 1

Proposition :

Soient x et y des réels positifs.
Si $x+y=0$, alors $x=0$ et $y=0$.
Plus généralement :

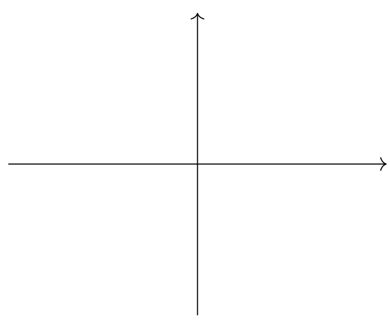
En particulier, pour x et y des réels : si $x^2+y^2=0$ alors $x=0$ et $y=0$.

1.b Valeur absolue

Définition :

Pour tout réel x, on définit la valeur absolue de x de la façon suivante :

Graphe :



Proposition :

Soient x et y des réels.

- $|x| \geq 0$
- $|x| = 0 \iff x = 0$
- $|-x| = |x|$
- $|xy| = |x||y|$
- Si $y \neq 0$ alors $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$
- Pour $n \in \mathbb{N}$, $|x^n| = |x|^n$ (et même $n \in \mathbb{Z}^-$ si $x \neq 0$)

En particulier, pour x réel, on a x^2 positif donc $x^2 = |x^2| = |x|^2$.

Il est très important de maîtriser les simplifications de $\sqrt{x^2}$ et $\sqrt{x}^2$:

Proposition :

Soient x, y, a des réels, et r un réel positif.

- $|x| \leq r \iff$

  $\iff$

  Interprétation géométrique :

- $|x - a| \leq r \iff$

  $\iff$

  $\iff$

  Interprétation géométrique :

- $|x| \geq r \iff$

  $\iff$

  Interprétation géométrique :

On a des équivalences similaires avec des inégalités larges ou strictes respectivement.

Proposition :

Pour tout x réel, $\boxed{x \leq |x|}$

(et aussi : $-x \leq |x|$)

Démonstration 2

Proposition : Inégalité triangulaire

Pour tous réels x et y,

1.c Intervalles de $\mathbb{R}$, parties de $\mathbb{R}$

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les parties de $\mathbb{R}$ de l'une des formes suivantes :

Remarquons que $\{a\}$ est un intervalle (c'est $[a, a]$) ; les parties de cette forme s'appellent des singletons.

Nous verrons plus tard dans l'année une autre définition des intervalles de $\mathbb{R}$; ce sont en quelque sorte les parties de $\mathbb{R}$ "qui n'ont pas de trous".

Nous allons manipuler constamment des intervalles, mais aussi des parties de $\mathbb{R}$ qui ne sont pas des intervalles.
Par exemple, $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle ; c'est cependant une réunion d'intervalles (c'est $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$).

Quelques caractéristiques éventuelles d'une partie A de $\mathbb{R}$:

Définition :

- On dit que A est majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout élément x de A, $x \leq M$.
  Dans ce cas, on dit que M est un majorant de la partie A.
- On dit que A est minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout élément x de A, $m \leq x$.
  Dans ce cas, on dit que m est un minorant de la partie A.
- On dit que A est bornée si elle est à la fois minorée et majorée.
- Soit M_0 un réel. On dit que M_0 est un maximum de A si : $M_0 \in A$ et $\forall x \in A$, $x \leq M_0$.
  Si A admet un maximum, alors il est unique, on le note $\max(A)$.
- Soit m_0 un réel. On dit que m_0 est un minimum de A si : $m_0 \in A$ et $\forall x \in A$, $m_0 \leq x$.
  Si A admet un minimum, alors il est unique, on le note $\min(A)$.

Exemples :
La partie $A =]-\infty, 1[\cup [2,3]$ est majorée et non minorée ; elle admet un maximum qui est 3. 3 est donc un majorant de A, mais ce n'est pas le seul, en voici d'autres : 3.1, 4, $\sqrt{42}$...
La partie $B = [0,1[$ est bornée ; elle admet un minimum qui est 0. Elle n'a pas de maximum, mais 1 est un majorant (tout comme 2, e, 10^{24}...)

Proposition :

> Une partie A de $\mathbb{R}$ est bornée si et seulement si

Démonstration 3

Exemple :

2 Quelques mises au point sur les équations et les inéquations

2.a Intérêt de la factorisation

Un produit de deux réels est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul. Autrement dit :

$$a \times b = 0 \Longleftrightarrow$$

D'où une méthode pour résoudre une équation réelle : passer tous les termes d'un côté, factoriser.

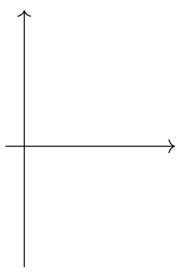
C'est également une bonne méthode à retenir pour l'étude du signe d'une quantité : on la factorise et on étudie le signe de chacun des facteurs. On peut utiliser un tableau de signe pour présenter les résultats.

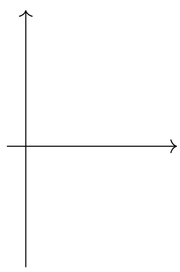
Application : signe d'un trinôme du second degré, résolution de $ax^2 + bx + c \geq 0$.

Supposons a, b, c réels, avec $a \neq 0$. Étudions le signe de $ax^2 + bx + c$. Il y a trois cas :

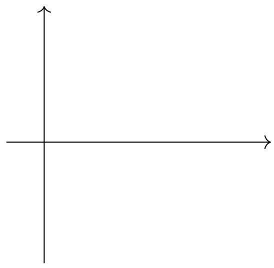
- Cas 1 : le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est strictement positif :
  Le trinôme possède deux racines réelles distinctes x_1 et x_2, et on peut supposer $x_1 < x_2$.
  Alors on a la factorisation : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

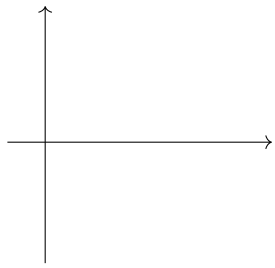
x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
signe de $ax^2 + bx + c$	



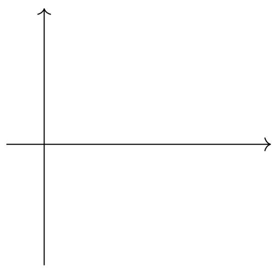


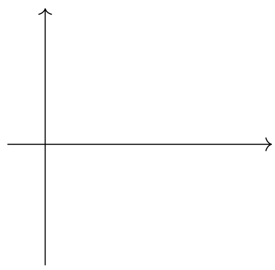
- Cas 2 : le discriminant Δ est nul :
  Le trinôme possède une racine double x_0 :
  Alors on a la factorisation : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$.





- Cas 3 : le discriminant Δ est strictement négatif :
  Le trinôme ne possède pas de racine réelle :
  $ax^2 + bx + c$ ne s'annule jamais, cette quantité est toujours du signe de a.





Remarques : 3 cas où le calcul de Δ est inutile...

- Lorsque votre calcul donne $\Delta = 0$, mieux vaut reprendre la forme $ax^2 + bx + c$: vous êtes passé à côté d'une identité remarquable, c'est beaucoup plus rapide !

- Lorsque l'équation est $ax^2 + bx$ (i.e. $c = 0$), cela se factorise automatiquement en $x(ax + b)$ donc les racines sont 0 et $-\dfrac{b}{a}$.

- Un autre cas où on ne fait pas de discriminant : $x^2 - \alpha = 0$:

2.b Equations, inéquations

Ne pas confondre égalité et équation.

Une équation E_1 est un problème : résoudre l'équation, c'est trouver toutes les solutions à ce problème.

Par exemple, $E_1 \ : \ x^2 = 2$ est une équation, c'est un problème dont les solutions sont $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.
Il peut y avoir une unique solution, ou plusieurs, aucune, une infinité...

Lorsqu'on écrit $E_1 \iff E_2$ (ou E_1 si et seulement si E_2), cela signifie :

La méthode générale est de raisonner par équivalence jusqu'à ce que le problème équivalent E_2 revienne à donner l'ensemble des solutions.

⚠ Une équation d'inconnue réelle x a un domaine de définition, qu'il faut déterminer avant de commencer la résolution : ce sont tous les x pour lesquels les deux membres de l'égalité ont un sens.

Exemples : Résoudre (E_1) : $\dfrac{\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}$ puis (E_2) : $|x-4| = 2x+10$

✎ **Démonstration 4**

De même, il faut bien faire la différence entre inégalité et inéquation : tout à l'heure, nous avons montré une inégalité :

$$\forall\, x \in [1,2], \quad \frac{3}{16} \leq \frac{2x+1}{3x^2+4} \leq \frac{5}{7}.$$

Résoudre une inéquation, c'est un problème différent : c'est trouver tous les réels x tels que les deux membre de l'inégalité ont un sens (recherche du domaine de définition) et tels que l'inégalité est vérifiée (résolution).

Exemple : Résoudre (I) : $\sqrt{x^2-3x+2} \leq x+1$.

✎ **Démonstration 5**

À retenir : lorsqu'on résout une équation ou une inéquation, si on veut garder l'équivalence en mettant au carré,

2.c Quantité conjuguée

Au passage, rappelons ce qu'est la quantité conjuguée de d'une expression de la forme $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ pour a et b strictement positifs : c'est $\sqrt{a}+\sqrt{b}$.
Il est parfois utile de multiplier au numérateur et au dénominateur par la quantité conjuguée :

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} =$$

3 Généralités sur les fonctions

3.a Domaine de définition, graphe

Les fonctions (ou applications) d'une variable réelle à valeurs réelles sont habituellement données sous la forme suivante :

$$f: \begin{array}{ccc} D & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

où D, l'ensemble de départ, est une partie non vide de $\mathbb{R}$;
et F, l'ensemble d'arrivée, est souvent $\mathbb{R}$, mais cela peut être aussi une partie de $\mathbb{R}$ qui contient au moins toutes les valeurs de la forme $f(x)$ avec $x \in D$.

Bien noter la différence : $\boxed{f \text{ est une \underline{fonction}, } f(x) \text{ est une \underline{expression}.}}$

Quand on s'intéresse peu à l'expression $f(x)$ et plutôt aux ensembles D et F, on représente f ainsi :

- D n'est pas forcément un intervalle. Dans nos exemples, lorsque ce n'est pas un intervalle, c'est souvent une réunion d'intervalles ; par exemple : $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$
  Certaines propriétés n'étant valables que sur des intervalles, on s'en sortira donc en appliquant nos théorèmes sur chacun des intervalles qui définissent D.
- D peut ne pas contenir toutes les valeurs x pour lesquelles $f(x)$ a un sens ; on peut considérer par exemple $f: \begin{array}{ccc} [0,\pi] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(x) \end{array}$, même si $\cos(x)$ a un sens pour des x en dehors de $[0,\pi]$.
- F n'est pas forcément $\mathbb{R}$ entier ; on peut considérer par exemple $g: \begin{array}{ccc} [0,\pi] & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & \cos(x) \end{array}$
  puisque pour tout $x \in [0,\pi]$, $\cos(x) \in [-1,1]$.
  F n'est pas forcément exactement l'ensemble des valeurs prises par la fonction ; on peut considérer par exemple $h: \begin{array}{ccc} [0,\pi] & \to & [-2,3] \\ x & \mapsto & \cos(x) \end{array}$ puisque $[-2,3]$ contient toutes les valeurs prises par cos sur l'intervalle $[0,\pi]$.

Il faut donc bien faire la différence entre :
l'ensemble d'arrivée F
et l'ensemble des valeurs prises par la fonction $\{f(x) \ / \ x \in D\}$, que l'on peut noter $f(D)$.

  On n'a qu'une inclusion :
  Graphiquement, l'ensemble des valeurs prises par f s'obtient en projettant la courbe de f sur l'axe des ordonnées.

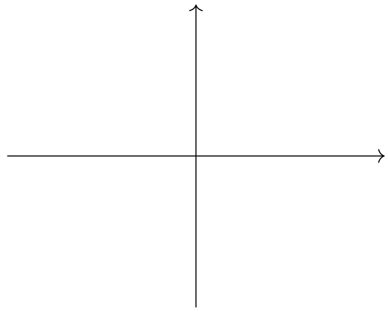
Notion de domaine de définition

Parfois, on ne donne pas la forme ci-dessus pour définir une fonction : on ne vous donne que l'expression $f(x)$, et on vous demande de trouver le domaine de définition de f, c'est-à-dire l'ensemble de toutes les valeurs x pour lesquelles l'expression $f(x)$ a un sens.
Par exemple, on écrira :

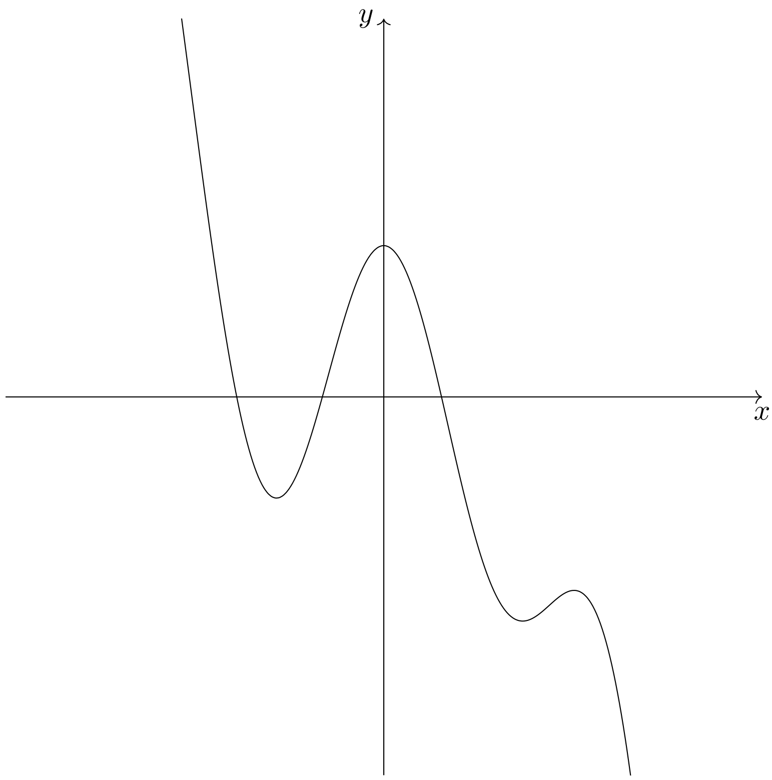
Le domaine de définition d'une fonction f est souvent noté D_f, mais ce n'est pas une notation universelle ! Si elle n'est pas introduite par l'énoncé, c'est à vous de le faire.

Exemple un peu difficile pour voir comment rédiger :
Déterminer le domaine de définition de $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{\ln(2-x)}{x+1}}$.
Démonstration 6

Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormé du plan.
Le graphe de f est l'ensemble des points du plan de coordonnées de la forme $(x, f(x))$, avec $x \in D$ (on parle aussi de courbe représentative de f).



Les équations de la forme $f(x) = \lambda$ et les inéquations de la forme $f(x) \geq \lambda$ (ou $f(x) > \lambda$, ou $f(x) \leq \lambda$...) s'interprètent graphiquement :



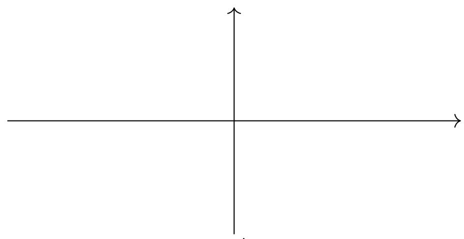
3.b Parité et imparité

Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$, on suppose $\mathcal{D}$ symétrique par rapport à 0, i.e. : $x \in \mathcal{D} \iff -x \in \mathcal{D}$.
Exemples :

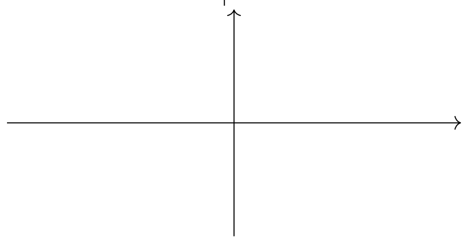
Définition :

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$.

- On dit que f est paire si :



- On dit que f est impaire si :



Exemples :

Conséquences graphiques :
Le graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport
Le graphe d'une fonction impaire est symétrique par rapport

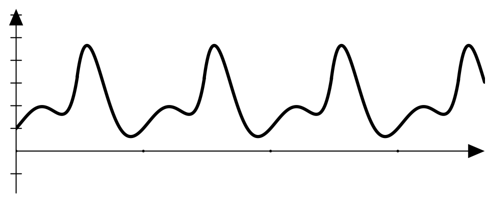
Remarque : Si $0 \in \mathcal{D}$ et si f est impaire alors $f(0) = 0$.

3.c Périodicité

Définition :

On suppose $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ et soit $T > 0$.
On dit que f est périodique de période T, ou plus simplement T-périodique, si :

ou :



Remarque : si $\mathcal{D}$ n'est pas $\mathbb{R}$ entier, il faut imposer en plus que $x \in \mathcal{D} \Longrightarrow x + T \in \mathcal{D}$.
Exemples :

Conséquence graphique : Le graphe d'une fonction T-périodique est

Remarque : Il n'y a jamais une seule période possible, puisque si T convient, alors $2T$, $3T$, $4T$... aussi.

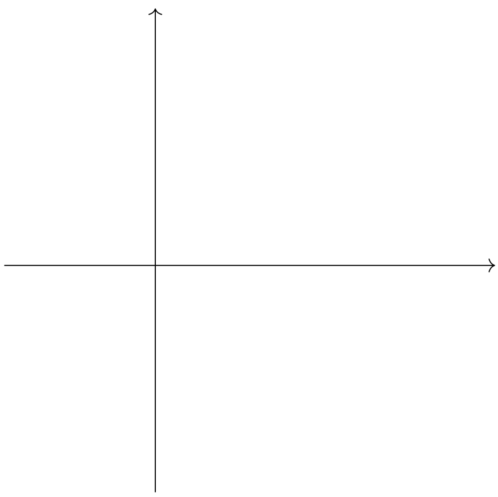
3.d Asymptotes horizontales et verticales

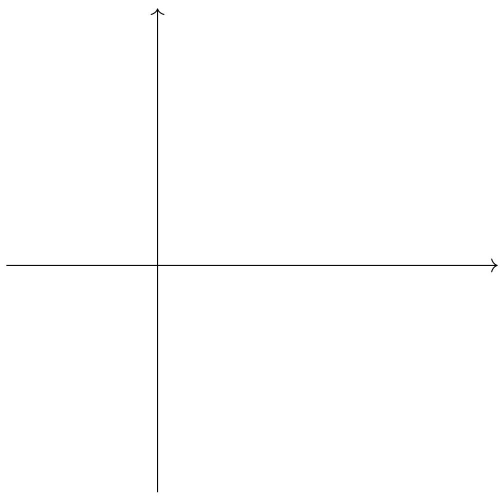
Dans cette partie, $\mathcal{D}$ est un intervalle ou une réunion d'intervalles, et $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$.

Définition :

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.
On dit que la droite d'équation $x = x_0$ est <u>asymptote verticale</u> à la courbe représentative de f si

Quelques exemples graphiques :



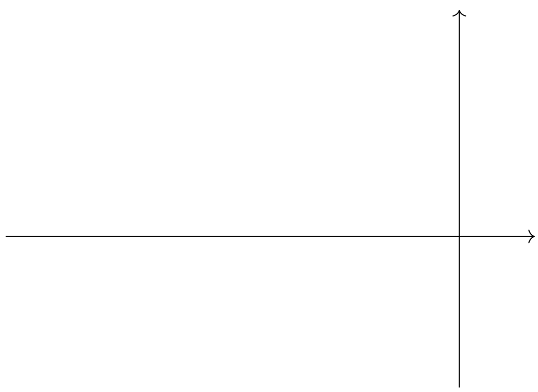


La position relative de la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f et de la droite asymptote Δ se déduisent du signe de la limite et de la façon dont on tend vers x_0 (par la gauche ou par la droite).

Définition :

Soit $b \in \mathbb{R}$.
On dit que la droite d'équation $y = b$ est <u>asymptote horizontale</u> à la courbe en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) si

Quelques exemples graphiques :



Exemple : $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$

Positions relatives

Pour connaître la position de la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f par rapport à la droite asymptote Δ, on étudie le signe de $f(x) - b$:

- Si
  alors $\mathcal{C}$ est au-dessus de Δ au voisinage de $+\infty$.
- Si
  alors $\mathcal{C}$ est en-dessous de Δ au voisinage de $+\infty$.

Exemple avec $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$:

⚠ Il est possible que le signe de $f(x) - b$
change en permanence lorsque x tend vers $\pm\infty$:
par exemple $f(x) = b + \dfrac{\cos(x)}{x}$.

Définition :

> Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.
> On dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est <u>asymptote oblique</u> à la courbe de f en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) si
>
> .

On obtient la position de la courbe par rapport à cette asymptote de façon similaire, en étudiant le signe de la quantité $f(x) - (ax + b)$.

3.e Graphes de certaines fonctions définies à partir de f

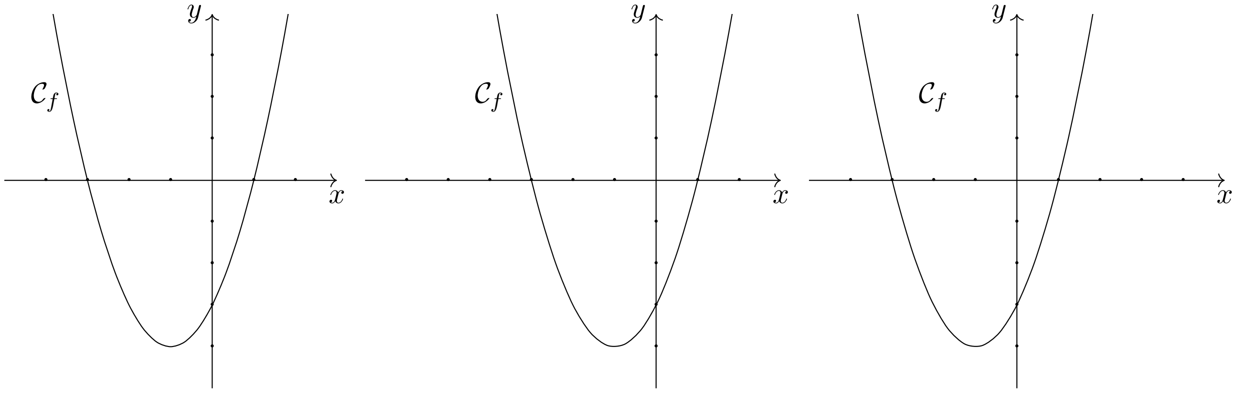
On se donne une fonction f, et une fonction g définie à partir de f, par exemple :

$$g : x \to f(x) + a \qquad g : x \to f(x+a) \qquad g : x \to f(a-x)$$

Comment, à partir de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f, obtient-on la courbe représentative $\mathcal{C}_g$ de g ? Contentons-nous d'exemples.

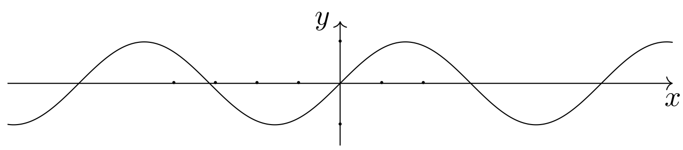
Prenons $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + 2x - 3 \end{array}$ et :

a) $g : x \mapsto f(x) + 3$ b) $g : x \mapsto f(x+1)$ c) $g : x \mapsto f(2-x)$



Démonstration 7

Prenons $f = \sin$ et $g : x \mapsto f(3x)$:



Démonstration 8

En particulier, si f est invariante par une transformation du type $x \mapsto x + a$ ou $x \mapsto a - x$, cela permet de réduire le domaine d'étude.
Par exemple, soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ paire telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+2) = f(x)$ et $f(1-x) = f(x)$.
Montrer que pour tracer la courbe représentative de f sur $\mathbb{R}$, il suffit d'étudier f sur $[0, \frac{1}{2}]$.

Démonstration 9

3.f Monotonie, minoration et majoration

Définition :

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$.

- On dit que f est croissante sur I si :

- On dit que f est strictement croissante sur I si :

- On dit que f est décroissante sur I si :

- On dit que f est strictement décroissante sur I si :

- On dit que f est monotone (respectivement strictement monotone) si elle croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).

On peut étendre ces définitions dans le cas où I n'est pas un intervalle (mais seulement une partie de $\mathbb{R}$), cependant attention à ne pas parler trop vite : que dire par exemple de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$?

Conséquence pratique : justifications dans les manipulations d'inégalités

On sait par exemple que exp est croissante sur $\mathbb{R}$.

Si on a déjà montré que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\dfrac{x}{x+1} \leq x$, on pourra écrire ensuite :

⚠ Si on veut des équivalences, la croissance ne suffit pas, même pour des inégalités larges.

On écrira : Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$\frac{x+2}{x} \leq x^2 \quad \Longleftrightarrow$$

De manière générale, si x, y sont deux éléments de I, l'argument "f est strictement croissante sur un intervalle I" nous permettra de justifier les équivalences suivantes :

$$x \leq y \Longleftrightarrow f(x) \leq f(y)$$
$$x < y \Longleftrightarrow f(x) < f(y)$$

Définition :

Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$.

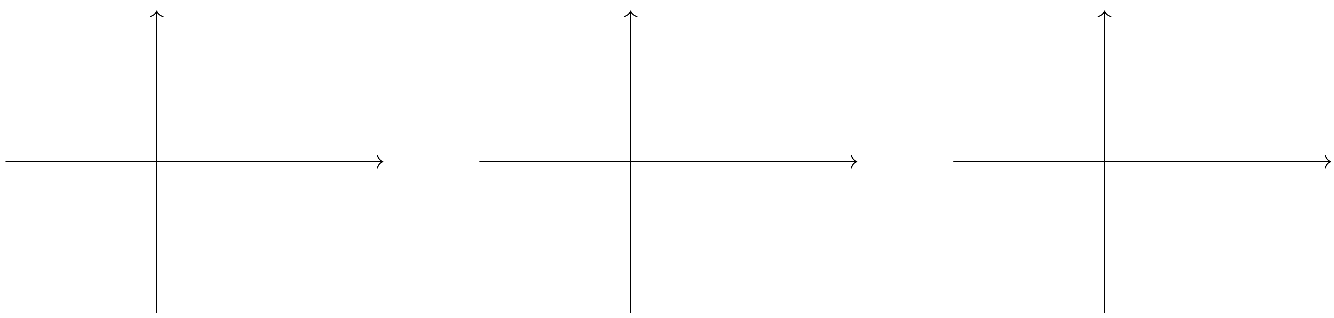
- On dit que f est majorée sur D si : $\exists\, M \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in D,\ \ f(x) \leq M$.
- On dit que f est minorée sur D si : $\exists\, m \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in D,\ \ f(x) \geq m$.
- On dit que f est bornée sur D si f est à la fois majorée et minorée, i.e. si :

Dire que f est majorée, c'est donc dire que l'ensemble $\{f(x) \ /\ x \in D\}$, noté $f(D)$, est majoré (idem pour minorée et bornée).

Définition :

Avec les mêmes notations,

- Lorsque f est majorée et que l'ensemble $f(D)$ admet un maximum, cela revient à dire qu'il existe un $x_0 \in D$ tel que pour tout x dans D, $f(x) \leq f(x_0)$.
  On dit alors que f admet un maximum en x_0.
- De même, on dit que f admet un minimum en $x_0 \in D$ s'il existe un $x_0 \in D$ tel que pour tout x dans D, $f(x) \geq f(x_0)$.



3.g Opérations

Définition :

Soient D une partie de $\mathbb{R}$, des fonctions $f,\ g : D \to \mathbb{R}$, et $\lambda \in \mathbb{R}$.
On définit les fonctions $f+g$, λf et $f \times g$ de la façon suivante :

$$\begin{array}{rccl} f+g : & D & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x)+g(x) \end{array} \qquad \begin{array}{rccl} \lambda f : & D & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \lambda f(x) \end{array} \qquad \begin{array}{rccl} f \times g : & D & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x)g(x) \end{array}$$

Ce qui s'écrit :

Définition :

Soient D_1 et D_2 des parties de $\mathbb{R}$, et des fonctions $f : D_1 \to \mathbb{R}$ et $g : D_2 \to \mathbb{R}$.
On suppose que :

On peut alors définir l'application composée $g \circ f$ de la façon suivante :

$$g \circ f : \quad \to \quad \mathbb{R}$$
$$x \quad \mapsto$$

Si la condition "$\forall x \in D_1,\ f(x) \in D_2$" n'est pas vérifiée, il faudra trouver le domaine de définition de $g \circ f$, c'est-à-dire l'ensemble des $x \in D_1$ tels que $f(x) \in D_2$.
Autrement dit, une méthode sera de résoudre un système d'équation, d'inconnue x réel :

$g \circ f(x)$ est bien défini $\iff$

Exemples : Pour chacune des fonctions h suivantes, écrire h comme composition de fonctions à préciser, et déterminer son domaine de définition :
a) $h(x) = \ln(2 - x)$ b) $h(x) = \sqrt{\ln(x) + 1}$ c) $h(x) = |\sin(x)^3 + \sin(x)|$.

Démonstration 10

⚠ On n'a pas, en général, $g \circ f = f \circ g$! Les fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$ peuvent même avoir des domaines de définition différents !

3.h Bijectivité

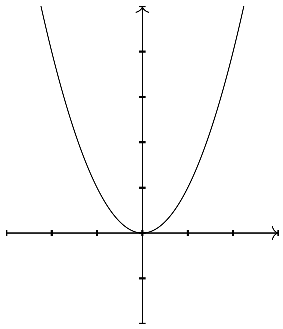
Définition :

Soient E et F deux ensembles, et $f : E \to F$. On dit que f est <u>bijective</u> si

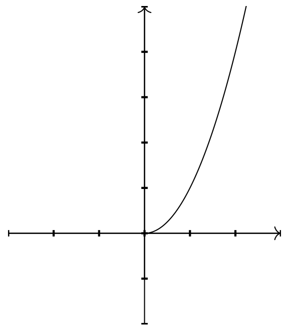
On dit aussi que f est une <u>bijection de E sur F</u>.
Dans ce cas, on définit <u>l'application réciproque de f</u> comme l'application notée f^{-1},

La réciproque f^{-1} est alors bien sûr bijective, de réciproque f.

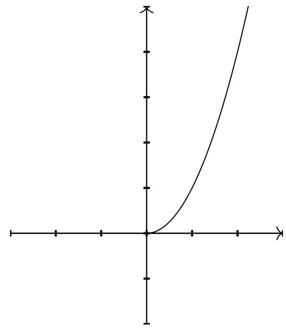
Quelques exemples et contre-exemples :



$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$



$$f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$



$$f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

La réciproque de f_2 est .

$f_3 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ n'est pas bijective, mais on peut dire qu'elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $f(\mathbb{R}_+)$ (rappel : c'est l'ensemble $\{f(x) \ / \ x \in \mathbb{R}_+\}$, qui vaut ici $\mathbb{R}_+$).

Les fonctions ln et exp sont bijectives et réciproques l'une de l'autre.

Remarques fondamentales : Sous ces hypothèses, si $x \in E$ et $y \in F$:

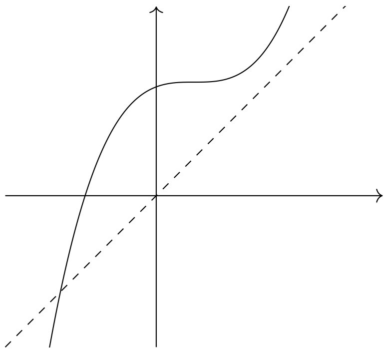
$$y = f(x) \iff$$

Conséquence pratique : manipulation des équivalences
Lorsqu'on écrit par exemple, pour des réels x et y : $x = y \iff \exp(x) = \exp(y)$
on justifiera en disant

En effet,

⚠ En conséquence, il faut faire attention lorsqu'on veut mettre au carré une équation en conservant l'équivalence :

Propriété des graphes de f et f^{-1} :
Si $f : E \to F$ est bijective de réciproque f^{-1}, alors les graphes de f et de f^{-1} sont



4 Continuité et dérivabilité

4.a Continuité

Dans cette partie, I et J désignent des $\boxed{\text{intervalles}}$ de $\mathbb{R}$.

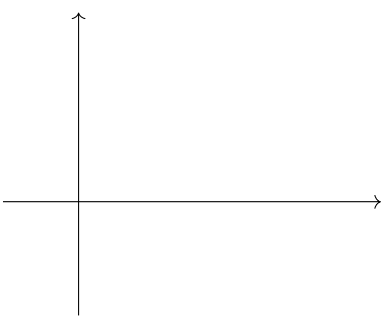
Définition :

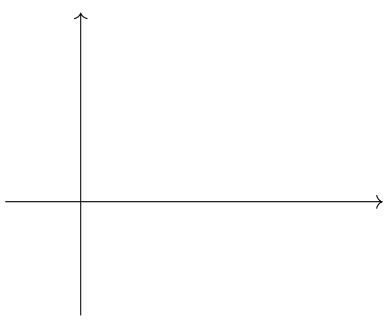
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in I$. On dit que f est continue en a si

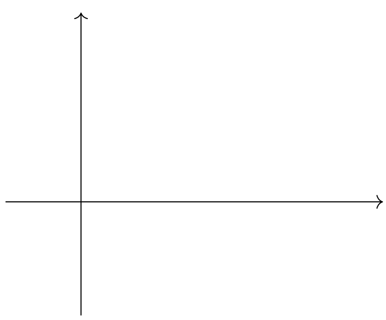
Dans le cas contraire, on dit que f est discontinue en a.
On dit que f est continue sur I si

On peut étendre cette définition en remplaçant l'intervalle I par une réunion d'intervalles ; les propriétés de cette partie 4.a sont également valables pour une réunion d'intervalles.

Comment "penser" la continuité : lorsqu'on trace le graphe d'une fonction continue sur un intervalle, "on ne lève pas le crayon" ; en un point de discontinuité, on doit "lever le crayon".





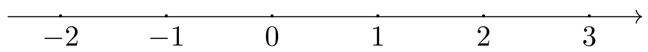


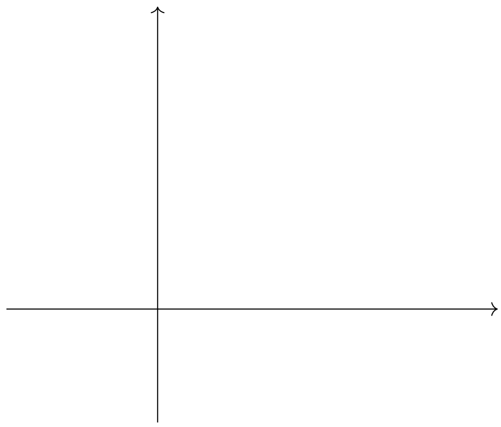
Exemples : la grande majorité des fonctions usuelles sont continues, mais elles ne le sont pas toutes. Par exemple, la fonction "partie entière" est discontinue en tout point entier relatif :

Définition :

> Soit $x \in \mathbb{R}$, la partie entière $\lfloor x \rfloor$ de x est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.

On a donc l'encadrement $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.





Proposition :

> Soient f, $g : I \to \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
> Soit $a \in I$.
> On suppose que f et g sont continues en a. Alors $f + g$, λf et $f \times g$ sont continues en a.
> Si $g(a) \neq 0$, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont définies au voisinage de a et continues en a.

Cette propriété est encore vraie en remplaçant la continuité en a par la continuité sur I (et la condition "$g(a) \neq 0$" par "g ne s'annule pas sur I").

Proposition :

> Soient des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ telles que $\forall\, x \in I,\ f(x) \in J$.
> Soit $a \in I$.
> Si f est continue en et si g est continue en
> alors $g \circ f$ est continue en

Cette propriété est encore vraie en remplaçant les continuités en un point par des continuités sur tout l'intervalle :

Exemples : $h_1 : \cos(\ln(x))$; $h_2(x) = \exp\left(\sin(x)^2\right)$; $h_3(x) = x\sin(\sqrt{x})$

4.b Théorème de la bijection

Théorème : de la bijection

Soit f une fonction définie sur I, à valeurs réelles, telle que :

-
-
-

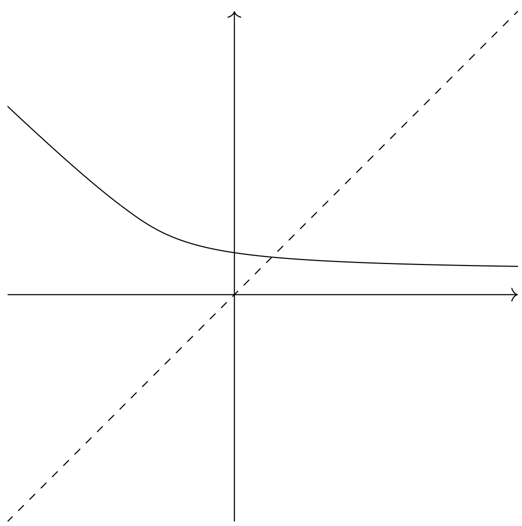
Alors f réalise une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$, c'est-à-dire sur

De plus, la réciproque $f^{-1} : f(I) \to I$ est continue sur $f(I)$, strictement monotone, de même monotonie que f.

⚠ : Souvent, on part de $f : I \to \mathbb{R}$, et $f(I)$ n'est pas $\mathbb{R}$ entier.
On ne peut pas dire que f telle quelle est bijective, d'où le terme "réalise une bijection", qui indique que la fonction devient bijective si on modifie l'ensemble d'arriver.
En toute rigueur, $\begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ et $\begin{array}{rcl} I & \to & f(I) \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ ne sont pas les mêmes fonctions.

L'intervalle $f(I)$ est donné par le tableau :

I	$[a,b]$	$]a,b]$	$[a,b[$	$]a,b[$
si f strict. croissante	$[f(a), f(b)]$	$\left]\lim\limits_{x\to a} f(x), f(b)\right]$	$\left[f(a), \lim\limits_{x\to b} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to a} f(x), \lim\limits_{x\to b} f(x)\right[$
si f strict. décroissante				



Ce théorème s'utilise très souvent pour répondre à des questions du type "montrer qu'il existe un unique x tel que $f(x) = y$", car si f est bijective de I sur J et que $y \in J$, on peut bien affirmer l'existence et l'unicité d'un $x \in I$ tel que $f(x) = y$.

Exemple : Montrer que l'équation $x^6 + x^4 + x^2 = 1$ admet une unique solution réelle positive.
✎ **Démonstration 11**

4.c Dérivabilité

4.c.i Définition et exemples

Dans cette partie, I et J désignent des $\boxed{\text{intervalles}}$ de $\mathbb{R}$.

Définition :

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in I$.

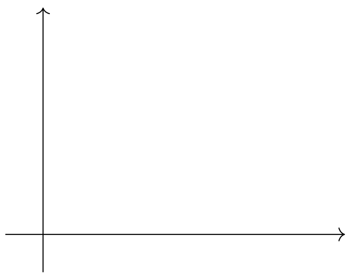
On dit que f est <u>dérivable en a</u> si

On dit que f est <u>dérivable sur I</u> si

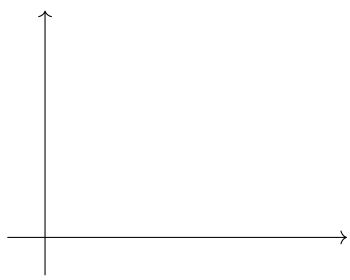
On peut étendre cette définition en remplaçant l'intervalle I par une réunion d'intervalles ; les propriétés jusqu'à la partie 4.c.iii sont également valables pour une réunion d'intervalles.

Variante :

Interprétation géométrique :



• Si f est dérivable en a, alors le graphe de f admet au point d'abscisse a une tangente non verticale, de pente $f'(a)$.



• Si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe mais est infinie, f n'est pas dérivable en a mais son graphe admet une tangente verticale en a.

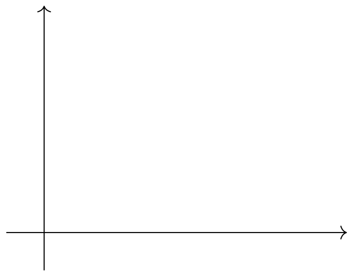
Exemple : $x \mapsto \sqrt{x}$ en 0, car

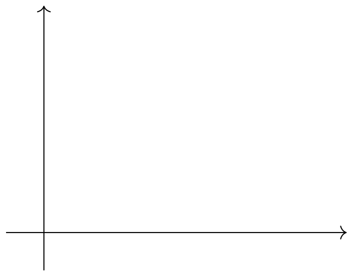
Proposition :

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$.

$$f \qquad\qquad \text{en } a \Longrightarrow f \qquad\qquad \text{en } a.$$

Comment "penser" la dérivabilité : lorsqu'on trace le graphe d'une fonction dérivable sur un intervalle, il n'y a pas de "point anguleux" ; la fonction est "lisse".





Exemples : La plupart des fonctions usuelles
sont dérivables là où elles sont continues,
mais pas toutes...

⚠ **Ne pas confondre f (désigne une fonction) et $f(x)$ (désigne une expression/un réel).**

- On ne dit pas "$x^2 \exp(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$" mais :
  "la fonction $f : x \mapsto x^2 \exp(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$"
  ou "la fonction $x \mapsto x^2 \exp(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$" (nommer la fonction n'est pas obligatoire)
- On ne dit pas "f est dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$" mais :
  "f est dérivable sur $\mathbb{R}$".
- On ne dit pas "$f'(x) = \left(x^2 \exp(x)\right)' = 2x \exp(x) + x^2 \exp(x)$" mais directement :
  "$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2x \exp(x) + x^2 \exp(x)$".
  En effet, $(f(x))'$ n'a aucun sens ! Si vous avez besoin de cette étape, laissez-la au brouillon.

⚠ **Toujours dire et justifier que la fonction f est dérivable avant d'écrire f' ou $f'(x) = ...$**
Le plus souvent, il suffira de dire "f est dérivable sur I comme somme et produit de fonctions dérivable sur I" ou "comme composée de la fonction ... dérivable sur ... et de la fonction ... dérivable sur ... " etc.

4.c.ii Dérivées successives

Définition :

Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$.
On pose : $f^{(0)} = f$.
Si f est dérivable sur I, on pose : $f^{(1)} = f'$.
Plus généralement, si $f^{(n)}$ existe et est dérivable sur I, on pose : $f^{(n+1)} =$

On se sert souvent de $f^{(2)}$, que l'on note plutôt f''.
Par exemple, pour $f = \ln$:

4.c.iii Opérations

Proposition :

Soient u, $v : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
On suppose que u et v sont dérivables en a. Alors :

- $u + v$ est dérivable en a et : $(u + v)'(a) = u'(a) + v'(a)$
- λu est dérivable en a et : $(\lambda u)'(a) = \lambda u'(a)$
- $u \times v$ est dérivable en a et : $(u \times v)'(a) = u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$
- Si $v(a) \neq 0$, alors $\dfrac{1}{v}$ et $\dfrac{u}{v}$ sont définies au voisinage de a et dérivables en a, et on a :
  $\left(\dfrac{1}{v}\right)'(a) = -\dfrac{v'(a)}{(v(a))^2}$, $\left(\dfrac{u}{v}\right)'(a) = \dfrac{u'(a)v(a) - u(a)v'(a)}{(v(a))^2}$

Cette propriété est encore vraie en remplaçant la dérivabilité en a par la dérivabilité sur I (et la condition "$v(a) \neq 0$" par "v ne s'annule pas sur I"). On peut retenir les formules :

Proposition :

Soient des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$.
On suppose que $\forall\, x \in I,\ f(x) \in J$.
Si f est dérivable en $a \in I$ et si g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et :

Cette propriété est encore vraie en remplaçant la dérivabilité de f en a par la dérivabilité de f sur I et la dérivabilité de g en $f(a)$ par la dérivabilité de g sur J, et on peut retenir la formule :

Cette formule permet de retrouver les cas particuliers suivants (sous réserve de définition) :

fonction	dérivée
$\exp(u)$	
$\ln(u)$	
u^α	
$\sqrt{u}$	
$x \mapsto u(ax+b)$	

Exemples : Étudier le domaine de définition, de continuité et de dérivabilité des fonctions suivantes, et calculer la dérivée là où elle est définie :

a) *Deux fonctions qui ne posent pas de difficulté :*

$$h_1(x) = \cos(\ln(x)) \qquad h_2(x) = \exp\left(\sin(x)^2\right)$$

b) *Deux cas plus "difficiles" :*

$$h_3(x) = x\sin(\sqrt{x}) \qquad h_4(x) = \sqrt{\frac{2+x}{1-x}}$$

✎ **Démonstration 12**

⚠ Nous appliquerons souvent le théorème à la fin de la page 23, et le plus souvent dans sa version où l'on parle de dérivabilité sur des intervalles (attention, a priori, les intervalles de dérivabilité de f et de g ne sont pas les mêmes).
De temps en temps, l'une des fonctions ne sera pas dérivable sur tout son domaine de définition (comme dans les deux cas plus "difficiles" ci-dessus). Il ne faut pas faire de faute de logique ; nous n'avons qu'un "si ... alors ..." dans le théorème. Ce qu'on peut affirmer :

Si f est dérivable en a et si g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a

Cela n'a pas le même sens que la proposition fausse suivante :

☠ « Si f est dérivable en a et si g n'est pas dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ n'est pas dérivable en a » ☠

Pour vous en convaincre, comparez la phrase suivante, qui est vraie :

Si j'arrive à un feu et que le feu est rouge, alors je m'arrête.

avec la phrase suivante, qui n'a pas le même sens et qui est même fausse :

Si j'arrive à un feu et que le feu n'est pas rouge, alors je ne m'arrête pas.

(Il y a des cas où l'on ne s'arrêtera pas, mais il y a aussi des cas où l'on s'arrêtera : si le feu est orange et qu'on a une distance suffisante pour s'arrêter, si le carrefour est bloqué...)

4.c.iv Application aux variations

Théorème :

Soit $\boxed{I \text{ un intervalle}}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.

-
-

Remarques importantes :

- En particulier, si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante.
- On a bien sûr des théorèmes similaires pour la décroissance et la stricte décroissance.
- ⚠ C'est faux lorsque I n'est pas un intervalle ! Contre-exemple :
- Que faire lorsque f n'est pas dérivable en l'une des extrémités de I ?
  On peut en fait remplacer, dans le théorème, l'hypothèse "f dérivable sur I" par "f continue sur I et f dérivable sur I privé de ses extrémités".
  Exemple de rédaction pour $x \mapsto \sqrt{x}$:

Exemples :
a) Déterminer les variations de $f : x \mapsto 6x^5 - 15x^4 + 10x^3 - \frac{1}{2}$
b) Dresser le tableau de variations de $g : x \mapsto \ln(1 + x^2)$.
✎ **Démonstration 13**

Application extrêmement importante : une méthode pour montrer une inégalité

Pour montrer une inégalité de la forme $g(x) \leq h(x)$, on peut poser $f : x \mapsto h(x) - g(x)$ et étudier les variations de f pour en tirer qu'elle est positive.

Voici des inégalités à connaître, que l'on montre par cette méthode :

Proposition :

Pour tout $x \in]-1, +\infty[$:

$$\ln(1+x) \leq x.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\exp(x) \geq 1 + x.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|\sin(x)| \leq |x|.$$

Démonstration 14

⚠ Ne pas oublier la méthode "naïve" pour démontrer une inégalité : faire des "opération élémentaires".

Exemple : montrer que pour tout $t \geq 1$, $\dfrac{\sin^2 t}{1+t^2} \leq \dfrac{1}{2}$.

Démonstration 15

Théorème :

Soit $\boxed{I \text{ un intervalle}}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.

Autrement dit :

Exemple : Que dire d'une fonction f, dérivable sur $\mathbb{R}^*$, telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$?

Plan du cours