TD 7. Ensembles $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}$.

Exercice 1. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le reste de la division euclidienne de 10^n par 3.
En déduire un critère de divisibilité par 3.

Exercice 2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $7 | 3^{2n+1} + 2^{n+2}$.

Exercice 3. Soient n et a des entiers supérieurs ou égaux à 2.

1) Montrer que si $a^n - 1$ est premier alors $a = 2$.
2) Montrer que si $2^n - 1$ est un nombre premier alors n est premier.

Les nombres de la forme $2^p - 1$ avec p premier s'appellent les nombres de Mersenne.

Exercice 4. Un entier naturel est dit parfait s'il est égal à la somme de ses diviseurs positifs sauf lui-même.

1) Vérifier que 6 et 28 sont parfaits.
2) Un nombre premier peut-il être parfait ?
3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $2^n - 1$ est premier alors $2^{n-1}(2^n - 1)$ est parfait.

Exercice 5. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor$.

Exercice 6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Exercice 7. Calculer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $S_n = \sum_{k=1}^{n^2-1} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor$.

Exercice 8. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, bornée. On pose $B = \{-x \ / \ x \in A\}$.
Montrer que B est bornée, et déteminer ses bornes supérieure et inférieure.