

TD 1. Analyse : généralités.

Exercice 1. a) Montrer que, pour tous réels x, y : $2xy \leq x^2 + y^2$.

b) En déduire que, pour tous réels a, b, c : $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$.

Exercice 2. À l'aide de l'inégalité triangulaire, sans faire de cas selon le signe des quantités qui apparaissent, montrer que pour tous réels x et y :

$$|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|.$$

Exercice 3. Simplifier, pour tous réels a et b tels que $a \geq b \geq 0$, la quantité suivante :

$$\sqrt{a + 2\sqrt{a - b}\sqrt{b}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a - b}\sqrt{b}}.$$

Exercice 4. Montrer que l'expression $x^4 - 3x^2 + 2$ admet un minimum sur $\mathbb{R}$ et le calculer (plusieurs méthodes possibles, trouvez-en une rapide!).

Exercice 5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(2n + 3)\sqrt{n + 1} \leq (2n + 1)\sqrt{n} + 3\sqrt{n + 1}.$$

Exercice 6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Exercice 7. Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \sqrt{x - 4\sqrt{x - 4}} = 1 & \text{b) } |2x - 4| \leq |x - 1| \\ \text{c) } x - 1 \leq \sqrt{x + 2} & \text{d) } x - \sqrt{x} - 2 \geq 0 \end{array}$$

Exercice 8. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $e^x + e^{-x} \geq 2 + x^2$.

Exercice 9. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f : x \mapsto \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$.

Déterminer des réels a, b et c tels que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 1}$.
En déduire que la courbe de f admet une asymptote en $+\infty$ que l'on déterminera.

Exercice 10. Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(e^{2x} - 3e^x + 2)$.

1°) Déterminer le domaine de définition D de f , puis dresser son tableau de variations.

2°) Simplifier, pour tout $x \in D$, l'expression $f(x) - 2x$.

En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x$ et interpréter graphiquement.

3°) Tracer la courbe de f .

Exercice 11. a) Déterminer la monotonie de $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$.

$$x \mapsto xe^x$$

b) Soit $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g(x)e^{g(x)} = x$.

Justifier que g est positive, puis que g est strictement croissante.

Exercice 12. Factoriser : $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$.

Exercice 13. Dans chacun des cas suivants, donner le domaine de définition de f , son domaine de dérivabilité et sa dérivée.

1°) $f(x) = \ln(\ln x)$

2°) $f(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right)$, où $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable.

3°) $f(x) = e^{\sqrt{\ln x}}$

4°) $f(x) = x^x$ (à étudier sur $\mathbb{R}_+^*$)

5°) $f(x) = x^{\sqrt{x^2-1}}$

Exercice 14. Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

a) $\ln \frac{x+3}{4} = \frac{1}{2}(\ln x + \ln 3)$

b) $3^{2x} - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{7}{2}} - 3^{2x-1}$

c) $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$

Exercice 15. Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} - \ln(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} + \ln(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} (\ln x)^3}{x^4}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \ln x}{e^{\sqrt{x}}}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2} - e^x$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x \cdot \ln(\ln x)}{x}$

Exercice 16. Pour quels réels x peut-on écrire $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$?

Exercice 17. Résoudre les équations suivantes :

a) $\cos x = \sin x$

b) $\cos(x) + \sqrt{3} \sin(x) = 0$

c) $\sqrt{2} \cos(2x) = \cos(x) - \sin(x)$

d) $2 \sin^2(x) - \sqrt{3} \sin(2x) = 3$

e) $\cos 4x + \cos 5x + \cos 6x = 0$

Exercice 18. Résoudre les inéquations suivantes :

a) $2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 \leq 0$ b) $\cos x - \cos(2x) \geq 0$

Exercice 19. On pose, pour tout réel x , $f(x) = \sin^2 x - \sin x + 2$.

1°) Calculer $f(\pi - x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Justifier alors qu'il suffit d'étudier f sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

2°) Dresser le tableau de variation de f sur cet intervalle.

3°) Tracer la courbe représentative de f .

Exercices supplémentaires

Exercice 20. On pose, pour tout $x > 0$, $f(x) = \frac{x^2 + 2}{2x}$.

Montrer, sans étude de fonction, que pour tout $x \in [\sqrt{2}, 2]$, $f(x) \in [\sqrt{2}, 2]$.

Indication : On pourra traduire le résultat à montrer par deux inégalités à démontrer.

Exercice 21. Soient x et y des réels de $] -1, 1[$.

a) Montrer que $-1 < xy < 1$.

b) Montrer que $\frac{x+y}{1+xy} \in] -1, 1[$.

Indication : On pourra étudier, pour y fixé, la fonction $f_y : t \mapsto \frac{t+y}{1+ty}$.

Exercice 22. Résoudre l'inéquation suivante : $\ln|x-1| - 2\ln|x| + \ln|x+1| < 1$.

Exercice 23. On pose $f(x) = x^{\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}}$. Déterminer le domaine de définition de f et simplifier $f(x)$.

Exercice 24. Résoudre les équations suivantes :

a) $\cos^2 x = \frac{3}{4}$

b) $\sin(2x) + \sin(x) = 0$

c) $2\cos^2(2x) - 3\cos(2x) = -1$

d) $\sin(2x) + \sin\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right) = 0$

e) $\cos(3x) + \sin(x) = 0$

f) $3\tan(x) = 2\cos(x)$

g) $2\cos(4x) + \sin(x) = \sqrt{3}\cos(x)$

h) $2\sin(x) + \sin(3x) = 0$

Exercice 25. Soit $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$.

$$x \mapsto \frac{2e^{2x}}{e^{2x} - 1}$$

Montrer que le point $A(0, 1)$ est centre de symétrie de la courbe de f .