Correction du devoir surveillé 2.

Exercice 1

1°)

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq i<j\leq n}\frac{i}{j} &= \sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1}\frac{i}{j}\right)\\ &= \sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}\left(\sum_{i=1}^{j-1} i\right)\\ &= \sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}\frac{(j-1)j}{2}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n}(j-1)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} k \quad \text{(changement d'indice } k=j-1\\ &= \frac{1}{2}\frac{(n-1)n}{2}\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\sum_{1\leq i<j\leq n}\frac{i}{j}=\frac{(n-1)n}{4}}$.

2°) Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}f \text{ est définie en } x &\iff \begin{cases}1+x^2\neq 0\\ -1\leq\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\leq 1\end{cases}\\ &\iff -1-x^2\leq 1-x^2\leq 1+x^2 \qquad \text{car } 1+x^2>0\\ &\iff -2\leq 0 \quad \text{et} \quad 0\leq 2x^2, \qquad \text{toujours vrai}\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\mathscr{D}=\mathbb{R}}$.

Remarquons que comme $-2<0$, on a, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $-1<\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

Par ailleurs, $\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=1\iff 1-x^2=1+x^2\iff x=0$.

Par quotient, la fonction $x\longmapsto\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et à valeurs dans $]-1;1[$ sur cet ensemble. Arcsin est dérivable sur $]-1;1[$. Par composition, f est au moins dérivable sur $\mathbb{R}^*$, i.e. sur $\mathscr{D}\backslash\{x_0\}$ avec $\boxed{x_0=0}$.

$\forall x\in\mathbb{R}^*$,

$$f'(x)=\frac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\times\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}$$

$$f'(x) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2} \times \frac{1}{\sqrt{\dfrac{(1+x^2)^2-(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}}}$$
$$= \frac{-4x}{(1+x^2)^2} \times \frac{1+x^2}{\sqrt{(1+x^2+1-x^2)(1+x^2-1+x^2)}}$$
$$= \frac{-4x}{(1+x^2)^2} \times \frac{1+x^2}{\sqrt{4x^2}}$$
$$= \frac{-4x}{(1+x^2)\times 2|x|}$$
$$\boxed{f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)|x|}}.$$

3°) a) Soit $z \in \mathbb{C}$, distinct de $i(\sqrt{3}+1)$.

$$f(z) = z \iff 1+z = (\sqrt{3}+1+iz)z \iff iz^2+\sqrt{3}z-1 = 0$$

Le discriminant de cette équation du second degré vaut : $\Delta = \sqrt{3}^2 + 4i = 3+4i$.
Soit $\delta = x+iy$ où $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\delta^2 = 3+4i \iff \begin{cases} (x+iy)^2 = 3+4i \\ |x+iy|^2 = |3+4i| \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x^2-y^2+i(2xy) = 3+4i \\ x^2+y^2 = \sqrt{3^2+4^2} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x^2-y^2 = 3 & : (1) \\ 2xy = 4 & \\ x^2+y^2 = 5 & : (3) \end{cases} \quad \text{par unicité de la forme algébrique}$$
$$\iff \begin{matrix} (1)+(3) \\ \\ (3)-(1) \end{matrix} \begin{cases} 2x^2 = 8 \\ xy = 2 \\ 2y^2 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$$

On constate que $\delta = 2+i$ convient comme racine carrée de Δ.
Donc $f(z) = z \iff z = \dfrac{-\sqrt{3}+2+i}{2i}$ ou $z = \dfrac{-\sqrt{3}-2-i}{2i}$.
Comme les deux valeurs obtenues sont distinctes de $i(\sqrt{3}+1)$, on conclut que les points fixes de f sont (puisque $\frac{1}{i} = -i$) :

$$\boxed{\frac{1+i(\sqrt{3}-2)}{2} \text{ et } \frac{-1+i(\sqrt{3}+2)}{2}.}$$

4°) Soit $z \in \mathbb{C}$, distinct de $i(\sqrt{3}+1)$.

$$|f(z)| = 1 \iff |f(z)|^2 = 1 \qquad \text{car 1 et } |f(z)| \text{ sont positifs}$$
$$\iff |1+z|^2 = |\sqrt{3}+1+iz|^2$$
$$\iff (1+z)(1+\overline{z}) = (\sqrt{3}+1+iz)(\sqrt{3}+1-i\overline{z})$$
$$\iff 1+(z+\overline{z})+z\overline{z} = (\sqrt{3}+1)^2 + i(z-\overline{z})(\sqrt{3}+1) + z\overline{z}$$
$$\iff 1+(z+\overline{z}) = 3+1+2\sqrt{3} + i(z-\overline{z})(\sqrt{3}+1)$$

Notons $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$, de sorte que le point M d'affixe z ait pour coordonnées (x, y). Alors $z + \overline{z} = 2x$ et $i(z - \overline{z}) = i2iy = -2y$, donc :

$$|f(z)| = 1 \iff 2x = 3 + 2\sqrt{3} - 2(\sqrt{3}+1)y$$

Remarquons que si $z = i(\sqrt{3}+1)$, i.e. $x = 0$ et $y = (\sqrt{3}+1)$, l'équation n'est pas vérifiée.

Ainsi, l'ensemble des points M solutions est $\boxed{\text{la droite d'équation } 2x + 2(\sqrt{3}+1)y = 3 + 2\sqrt{3}}$.

Exercice 2

1°) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\boxed{\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1}$ donc $\mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}\, x = \mathrm{sh}^2 x + \mathrm{sh}\, x + 1$.
Étudions le trinôme du second degré $X^2 + X + 1$; son discriminant est : $\Delta = -3 < 0$. Comme le coefficient de X^2 est positif, on a : $\forall X \in \mathbb{R}, \quad X^2 + X + 1 > 0$.
Donc, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}\, x > 0}$.

2°) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions dérivables.
$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \mathrm{ch}\, x\ e^{\mathrm{sh}\, x} - 1$
Par somme, produit et composée de fonctions dérivables, f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \mathrm{ch}^2 x\ e^{\mathrm{sh}\, x} + \mathrm{sh}\, x\ e^{\mathrm{sh}\, x} \\ &= e^{\mathrm{sh}\, x}(\mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}\, x) > 0 \qquad \text{car exp est strictement positive et par la question 1} \end{aligned}$$

$f'(0) = \mathrm{ch}(0)e^{\mathrm{sh}(0)} - 1 = 0$ car $\mathrm{ch}(0) = 1$ et $\mathrm{sh}(0) = 0$; de même $f(0) = e^{\mathrm{sh}(0)} - 0 - 1 = 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$+$			
f'		↗	0	↗	
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		↘	0	↗	

On en déduit que, $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0}$.

3°) Soit $x \in]0, 1[$. Par la question précédente, $f(x) \geq 0$ donc $e^{\mathrm{sh}\, x} \geq 1 + x$ (c'est même vrai pour tout réel x)
En appliquant à $-x$, on obtient :

$$\begin{aligned} e^{\mathrm{sh}(-x)} &\geq 1 - x \\ e^{-\mathrm{sh}\, x} &\geq 1 - x && \text{par imparité de sh} \\ \frac{1}{e^{\mathrm{sh}\, x}} &\geq 1 - x > 0 && \text{car } x \in]0, 1[\\ e^{\mathrm{sh}\, x} &\leq \frac{1}{1-x}. \end{aligned}$$

Finalement : $\boxed{\forall x \in]0, 1[, \quad 1 + x \leq e^{\mathrm{sh}\, x} \leq \frac{1}{1-x}}$.

4°) Soit $n \geq 2$. On va reconnaître des sommes téléscopiques :

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{np} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=n}^{np} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=n}^{np} \left(-\ln(k) + \ln(k+1)\right) \\ &= -\ln(n) + \ln(n+1) - \ln(n+1) + \ln(n+2) + \cdots - \ln(np) + \ln(np+1) \\ &= -\ln(n) + \ln(np+1)\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k=n}^{np} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{np+1}{n}\right).}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{np} \ln\left(1-\frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=n}^{np} \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) = \sum_{k=n}^{np} \left(-\ln(k-1) - \ln(k)\right) \\ &= \ln(n-1) - \ln(n) + \ln(n) - \ln(n+1) + \cdots + \ln(np-1) - \ln(np) \\ &= \ln(n-1) - \ln(np)\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k=n}^{np} \ln\left(1-\frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{n-1}{np}\right).}$$

5°) Soit $n \geq 2$. Pour tout $x \in]0,1[$, $0 < 1+x \leq e^{\operatorname{sh} x} \leq \frac{1}{1-x}$, donc, par croissance de ln :

$$\ln(1+x) \leq \operatorname{sh} x \leq \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = -\ln(1-x).$$

Comme $n \geq 2$, pour tout $k \in \{n, ..., np\}$, $\frac{1}{k} \in]0,1[$ donc on peut écrire :

$$\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq \operatorname{sh}\left(\frac{1}{k}\right) \leq -\ln\left(1-\frac{1}{k}\right).$$

Sommons ces inégalités pour k allant de n à np :

$$\sum_{k=n}^{np} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq S_n \leq -\sum_{k=n}^{np} \ln\left(1-\frac{1}{k}\right).$$

Donc, par 4,

$$\boxed{\ln\left(\frac{np+1}{n}\right) \leq S_n \leq -\ln\left(\frac{n-1}{np}\right).}$$

6°) p est fixé dans $\mathbb{N}^*$.

$\frac{np+1}{n} = p + \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} p$ et ln est continue en p donc, $\ln\left(\frac{np+1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln p$.

De même, $\frac{n-1}{np} = \frac{1}{p} - \frac{1}{np} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{p}$, donc $-\ln\left(\frac{n-1}{np}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\ln\left(\frac{1}{p}\right) = \ln p$.

Donc, par le théorème d'encadrement, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \ln p}$.

Exercice 3

1°) a) $S_N = \sum_{i=1}^{N}(2i-1) = 2\sum_{i=1}^{N} i \; - \; \sum_{i=1}^{N} 1 = 2\frac{N(N+1)}{2} - N = N(N+1) - N,$

Ainsi $\boxed{S_N = N^2}$.

b) Lorsqu'on somme I_1, I_2, …, I_n, on obtient la somme de tous les entiers impairs à partir de 1, jusqu'à un certain entier impair ; comme chaque somme I_k comporte k termes, le nombre total d'entiers impairs présents est $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Donc $\boxed{T_n = S_{\frac{n(n+1)}{2}}.}$

c) Soit $n \geq 2$. On a $\boxed{I_n = T_n - T_{n-1}}$. Or $T_n = S_{\frac{n(n+1)}{2}} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ d'après la question a. Donc,

$$\begin{aligned} I_n &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{(n-1)n}{2}\right)^2 \\ &= \frac{n^2}{4}\left((n+1)^2 - (n-1)^2\right) \\ &= \frac{n^2}{4}\left(n^2 + 2n + 1 - n^2 + 2n - 1\right) \\ &= \frac{n^2}{4} 4n \\ \boxed{I_n &= n^3} \end{aligned}$$

On a $I_2 = 3 + 5 = 8$, c'est bien 2^3 ; on a $I_3 = 7 + 9 + 11 = 27$, c'est bien 3^3.

d) On a également $I_1 = 1^3$, donc la formule trouvée ci-dessus est valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n} I_k = T_n = S_{\frac{n(n+1)}{2}} = \boxed{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}.$$

2°) a) Le discriminant de cette équation du second degré est $\Delta = 1 - 4 \times 1 \times (-n(n+1)) = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2$.
Les solutions sont donc $\frac{-(-1) + (2n+1)}{2}$ et $\frac{-(-1) - (2n+1)}{2}$, c'est-à-dire $\boxed{n+1 \text{ et } -n}$.

b) Par hypothèse :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} u_k^3 &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} u_k\right)^2 \\ \sum_{k=1}^{n} u_k^3 + u_{n+1}^3 &= \left(\sum_{k=1}^{n} u_k + u_{n+1}\right)^2 \\ \sum_{k=1}^{n} u_k^3 + u_{n+1}^3 &= \left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right)^2 + u_{n+1}^2 + 2u_{n+1}\sum_{k=1}^{n} u_k \end{aligned}$$

Or $\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} u_k^3$ par hypothèse, d'où $\boxed{u_{n+1}^3 = u_{n+1}^2 + 2u_{n+1}\sum_{k=1}^{n} u_k}$.

c) Nous allons raisonner par récurrence forte. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n : u_n = n$.

- Par hypothèse, $u_1^3 = u_1^2$ donc $u_1^2(u_1 - 1) = 0$.
  Comme $u_1 > 0$, on a en particulier $u_1 \neq 0$, donc $u_1 = 1$. Ainsi, H_1 est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On suppose que H_k est vraie pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$. Montrons que H_{n+1} est vraie.

  D'après la question précédente, $u_{n+1}^3 - u_{n+1}^2 - 2u_{n+1}\sum_{k=1}^{n} u_k = 0$.

Comme pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $u_k = k$, et que $\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$, cela s'écrit :

$$u_{n+1}^3 - u_{n+1}^2 - u_{n+1} n(n+1) = 0.$$

Or $u_{n+1} > 0$, donc $u_{n+1} \neq 0$, donc $u_{n+1}^2 - u_{n+1} - n(n+1) = 0$.
Ainsi u_{n+1} est solution de l'équation résolue en question a. Comme $u_{n+1} > 0$, on en tire que $u_{n+1} = n + 1$.
On a bien montré que H_{n+1} est vraie.

- Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = n}$.

Exercice 4

1°) f est définie sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions définies sur $\mathbb{R}$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+(x-3)^2} + \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{1}{1+(x+3)^2} > 0$.
$\boxed{f \text{ est donc strictement croissante sur l'intervalle } \mathbb{R}}$.

2°) f est continue sur $\mathbb{R}$, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et $\mathbb{R}$ est un intervalle.
Donc, d'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R})$, et $f(\mathbb{R}) = \left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[= \left]-\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right[$.
Or, $\dfrac{5\pi}{4} \in \left]-\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right[$, donc $\dfrac{5\pi}{4}$ admet un unique antécédent x_0 par f.
Autrement dit $\boxed{(*) \text{ possède une unique solution } x_0 \in \mathbb{R}.}$

3°) Calculons $f(4) = \text{Arctan}(1) + \text{Arctan}(4) + \text{Arctan}(7) = \dfrac{\pi}{4} + \text{Arctan}(4) + \text{Arctan}(7)$. Comme $\text{Arctan}(4) < \dfrac{\pi}{2}$ et $\text{Arctan}(7) < \dfrac{\pi}{2}$, on en tire que $f(4) < \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{5\pi}{4}$.
Ainsi, $f(4) < f(x_0)$. Si on avait $4 \geq x_0$, par croissance de f, on aurait $f(4) \geq f(x_0)$: absurde.
Donc $\boxed{4 < x_0}$.

4°) Comme $1 < 2$ et que Arctan est strictement croissante, $\dfrac{\pi}{4} = \text{Arctan}(1) < \text{Arctan}(2)$. On a aussi $\text{Arctan}(2) < \dfrac{\pi}{2}$ puisque Arctan est à valeurs dans $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. De même, $\dfrac{\pi}{4} < \text{Arctan}(5) < \dfrac{\pi}{2}$, donc par somme $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$. Donc $\tan(\theta)$ est bien défini.
Calculons :

$$\begin{aligned}\tan(\theta) = \tan\left(\text{Arctan}(2) + \text{Arctan}(5)\right) &= \frac{\tan\left(\text{Arctan}(2)\right) + \tan\left(\text{Arctan}(5)\right)}{1 - \tan\left(\text{Arctan}(2)\right)\tan\left(\text{Arctan}(5)\right)} \\ &= \frac{2+5}{1-2\times 5} \\ \boxed{\tan(\theta) = -\frac{7}{9}}\end{aligned}$$

5°) $f(5) = \text{Arctan}(2) + \text{Arctan}(5) + \text{Arctan}(8) = \theta + \text{Arctan}(8)$. Or, de même qu'à la question précédente, on a $\dfrac{\pi}{4} < \text{Arctan}(8) < \dfrac{\pi}{2}$, et on a vu que $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$, ce qui donne $\dfrac{3\pi}{4} < f(5) < \dfrac{3\pi}{2}$.
Ainsi $\tan\left(f(5)\right)$ existe, et :

$$\tan\left(f(5)\right) = \tan\left(\theta + \text{Arctan}(8)\right) = \frac{\tan(\theta) + \tan\left(\text{Arctan}(8)\right)}{1 - \tan(\theta)\tan\left(\text{Arctan}(8)\right)}$$

Or $\tan(\theta) = -\dfrac{7}{9}$ et $\tan(\text{Arctan}(8)) = 8$ donc :

$$\tan(f(5)) = \frac{-\frac{7}{9}+8}{1+\frac{7}{9}\times 8} = \frac{\frac{-7+72}{9}}{\frac{9+56}{9}} = \frac{-7+72}{9+56} = \frac{65}{65} = 1$$

Ainsi, $\tan(f(5)) = \tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$. On en tire que $\exists\, k \in \mathbb{Z},\ \ f(5) = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$. Comme $f(5) \in \left[\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$, la seule possibilité est $f(5) = \dfrac{\pi}{4} + \pi = \dfrac{5\pi}{4}$.
Par unicité de la solution de $(*)$, on en tire que $\boxed{x_0 = 5}$.

Exercice 5

1°) Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
z^n + 1 = 0 &\iff z^n = -1 \\
&\iff z^n = e^{i\pi} \\
&\iff z^n = \left(e^{i\frac{\pi}{n}}\right)^n \\
&\iff \left(\frac{z}{e^{i\frac{\pi}{n}}}\right)^n = 1 \\
&\iff \exists\, k \in \{0,\dots,n-1\},\ \frac{z}{e^{i\frac{\pi}{n}}} = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \\
&\iff \exists\, k \in \{0,\dots,n-1\},\ z = e^{i\frac{\pi}{n}} e^{i\frac{2k\pi}{n}}
\end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est $\boxed{\left\{e^{i\frac{(2k+1)\pi}{n}} \ / \ k \in \{0,\dots,n-1\}\right\}}$.

2°) **a)** Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1}\left(z + e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p} z^p \left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^{n-p}\right) \qquad \text{par la formule du binôme} \\
&= \sum_{p=0}^{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{p} z^p \left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^{n-p}\right) \quad \text{(échange des sommes)} \\
&= \sum_{p=0}^{n}\left(\binom{n}{p} z^p \left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}(n-p)}\right)\right) \quad \text{car } \binom{n}{p} z^p \text{ est une constante vis-à-vis de } k
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1}\left(z + e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p} a_p z^p} \quad \text{avec, pour tout } p \in \{0,\dots,n\},\ \ a_p = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}(n-p)}$$

b) Soit $p \in \{0,\dots,n\}$. $a_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{i\frac{2\pi}{n}(n-p)}\right)^k$.

- On a : $e^{i\frac{2\pi}{n}(n-p)} = 1 \iff \frac{2\pi}{n}(n-p) = 0[2\pi] \iff \dfrac{n-p}{n}$ entier $\iff p = n$ ou $p = 0$, puisque $p \in \{0,\dots,n\}$. Ainsi, $\boxed{\text{si } p = 0 \text{ ou } p = n,\ a_p = n}$.

- Sinon,

$$\begin{aligned} a_p &= \frac{1-\left(e^{i\frac{2(n-p)\pi}{n}}\right)^n}{1-e^{i\frac{2(n-p)\pi}{n}}} \\ &= \frac{1-e^{i2(n-p)\pi}}{1-e^{i\frac{2(n-p)\pi}{n}}} \\ &\boxed{a_p = 0} \text{ car } (n-p) \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

c) D'après les question a et b : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(z+e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n = \binom{n}{0}a_0z^0 + \binom{n}{n}a_nz^n = \boxed{n(1+z^n)}$.

3°) a) Soient θ et θ' deux réels.

$$\begin{aligned} e^{i\theta}+e^{i\theta'} &= e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}\left(e^{i\left(\theta-\frac{\theta+\theta'}{2}\right)}+e^{i\left(\theta'-\frac{\theta+\theta'}{2}\right)}\right) \\ &= e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}\left(e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}}+e^{i\frac{\theta'-\theta}{2}}\right) \\ &\boxed{e^{i\theta}+e^{i\theta'} = e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}2\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)} \end{aligned}$$

b) Prenons $z = e^{i\frac{\pi}{n}}$, d'après la question 1, on a donc $n(z^n+1)=0$.

Donc, d'après la question 2c, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{i\frac{\pi}{n}}+e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n = 0$.

Soit $k \in \{0,\dots,n-1\}$, utilisons la question précédente avec $\theta = \dfrac{\pi}{n}$ et $\theta' = \dfrac{2k\pi}{n}$:

$\theta+\theta' = \dfrac{\pi}{n}+\dfrac{2k\pi}{n} = \dfrac{(2k+1)\pi}{n}$ et $\theta-\theta' = \dfrac{\pi}{n}-\dfrac{2k\pi}{n} = \dfrac{(-2k+1)\pi}{n}$, donc :

$$\begin{aligned} e^{i\frac{\pi}{n}}+e^{i\frac{2k\pi}{n}} &= 2e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2n}}\cos\left(\frac{(-2k+1)\pi}{2n}\right) \\ &= 2e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2n}}\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) \\ \text{d'où}\quad \left(e^{i\frac{\pi}{n}}+e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n &= 2^ne^{i\frac{(2k+1)\pi}{2}}\cos^n\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) \\ &= 2^ne^{i\frac{\pi}{2}}e^{ik\pi}\cos^n\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) \\ &= 2^ni(-1)^k\cos^n\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) \qquad \text{car } e^{ik\pi} = (e^{i\pi})^k = (-1)^k \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{i\frac{\pi}{n}}+e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n-1}2^ni(-1)^k\cos^n\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) \\ &= 2^ni\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\cos^n\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) \end{aligned}$$

Puisque cette somme est nulle et que $2^ni \neq 0$, on obtient bien : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\cos^n\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) = 0}$.