Devoir surveillé 2.

Samedi 14 novembre 2026, de 7h55 à 11h55.

L'usage de calculatrices est interdit

La présentation, la lisibilité et l'orthographe, ainsi que la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Il est demandé d'encadrer ou de souligner les résultats, et de laisser une ***marge****.*
Dans un même exercice ou problème, on pourra admettre les résultats des questions non résolues afin de répondre aux questions suivantes. Les exercices ne sont pas classés par ordre de difficulté et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Exercice 1

Cet exercice est composé de questions indépendantes.

1°) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Calculer :

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} \frac{i}{j}.$$

2°) Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}$ de $f : x \mapsto \text{Arcsin}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.

Montrer que f est dérivable au moins sur $\mathscr{D}\backslash\{x_0\}$, où x_0 est un réel à préciser, et calculer la dérivée de f sur ce domaine.

3°) Pour $z \in \mathbb{C}\backslash\{i(\sqrt{3}+1)\}$, on pose : $f(z) = \dfrac{1+z}{\sqrt{3}+1+iz}$.

a) Déterminer les points fixes de f, c'est-à-dire les complexes z tels que $f(z) = z$.

b) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z du plan tels que $f(z)$ est de module 1.

Exercice 2

Soit p fixé dans $\mathbb{N}^*$.

On considère, pour entier n supérieur à 2, $S_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{np} \text{sh}\left(\frac{1}{k}\right)$.

1°) Redonner la relation entre $\text{sh}^2\, x$ et $\text{ch}^2\, x$ pour tout réel x, puis montrer : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}^2\, x + \text{sh}\, x > 0$.

2°) Soit f définie par $f(x) = e^{\text{sh}(x)} - x - 1$ pour $x \in \mathbb{R}$.
Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.

3°) En utilisant deux fois le résultat de la question précédente, montrer :

$$\forall x \in]0,1[, \quad 1 + x \leq e^{\text{sh}\, x} \leq \frac{1}{1-x}.$$

4°) Calculer $\displaystyle\sum_{k=n}^{np} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ et $\displaystyle\sum_{k=n}^{np} \ln\left(1-\frac{1}{k}\right)$ pour $n \geq 2$.

5°) Déduire de ce qui précède que : $\forall n \geq 2$, $\ln\left(\dfrac{np+1}{n}\right) \leq S_n \leq -\ln\left(\dfrac{n-1}{np}\right)$.

6°) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 3

1°) Sommes des cubes

Le but de cette question est de prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2.$$

a) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On note S_N la somme des N premiers entiers naturels impairs :

$$S_N = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2N-1) = \sum_{i=1}^{N} (2i-1).$$

Calculer S_N.

b) On définit les nombres I_k pour $k \in \mathbb{N}^*$ de la façon suivante :

$$I_1 = 1 \quad ; \quad I_2 = 3 + 5 \quad ; \quad I_3 = 7 + 9 + 11 \quad ; \quad I_4 = 13 + 15 + 17 + 19 \quad \ldots$$

Plus précisément, on pose $I_1 = 1$ et, pour $k \geq 2$, on définit I_k comme la somme des k premiers entiers naturels impairs **non encore écrits** dans $I_1, \ldots, I_{k-1}$.
On pose alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} I_k.$$

Justifier sans calcul que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = S_{\frac{n(n+1)}{2}}$.

c) Exprimer, pour tout $n \geq 2$, I_n en fonction de T_n et de T_{n-1}, et en déduire la valeur de I_n. Vérifier la cohérence de votre résultat pour $n = 2$, $n = 3$.

d) À l'aide des résultats précédents, trouver la valeur de $\sum_{k=1}^{n} k^3$.

2°) Pseudo-réciproque

Le but de cette question est de prouver une pseudo-réciproque de la question 1.
Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} u_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right)^2$$

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation : $x^2 - x - n(n+1) = 0$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $u_{n+1}^3 = u_{n+1}^2 + 2u_{n+1} \sum_{k=1}^{n} u_k$.

c) Montrer à l'aide d'une récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n$.

Exercice 4

Le but de l'exercice est de résoudre l'équation :

$$(*) \ : \ \text{Arctan}(x-3) + \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(x+3) = \frac{5\pi}{4}.$$

1°) Déterminer les variations de la fonction f définie par :

$$f(x) = \text{Arctan}(x-3) + \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(x+3).$$

2°) Justifier que l'équation $(*)$ admet une unique solution x_0.

3°) Montrer que $4 < x_0$.

4°) On pose $\theta = \text{Arctan}(2) + \text{Arctan}(5)$. Justifier que $\tan(\theta)$ existe, puis le calculer.

5°) Justifier que $\dfrac{3\pi}{4} < f(5) < \dfrac{3\pi}{2}$, puis calculer $\tan\left(f(5)\right)$.
En déduire la valeur de x_0.

Exercice 5

On note n un entier naturel non nul.

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^n + 1 = 0$.

2°) **a)** Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(z + e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a_p z^p$$

où pour tout $p \in \{0, \ldots, n\}$, $a_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}(n-p)}$.

b) Calculer, pour tout $p \in \{0, \ldots, n\}$, la valeur de a_p ; on montrera que $a_p = 0$ sauf pour deux valeurs de p à déterminer.

c) En déduire que pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(z + e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n = n(z^n + 1).$$

3°) **a)** Factoriser, pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $e^{i\theta} + e^{i\theta'}$.

b) À l'aide du résultat de la question 2c et d'une solution particulière bien choisie de (E), en déduire que

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cos^n\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) = 0.$$

* * * * * FIN * * * * *