Corrigé du devoir maison 5.

Exercice 1

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
(\cos x)^4(\sin x)^2 &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2\\
&= -\frac{1}{64}\left(e^{i4x}+4e^{i2x}+6+4e^{-i2x}+e^{-i4x}\right)\left(e^{i2x}-2+e^{-i2x}\right)\\
&= -\frac{1}{64}\big(e^{i6x}-2e^{i4x}+e^{i2x}+4e^{i4x}-8e^{i2x}+4+6e^{i2x}-12+6e^{-i2x}\\
&\qquad\qquad +4-8e^{-i2x}+4e^{-i4x}+e^{-i2x}-2e^{-i4x}+e^{-i6x}\big)\\
&= -\frac{1}{64}\left(e^{i6x}+e^{-i6x}+2e^{i4x}+2e^{-i4x}-4-e^{i2x}-e^{-i2x}\right)\\
&= -\frac{1}{64}\left(2\cos(6x)+4\cos(4x)-2\cos(2x)-4\right)\\
&= \frac{1}{32}\left(-\cos(6x)-2\cos(4x)+\cos(2x)+2\right).
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{32}\int_0^{\pi/4}\left(-\cos(6x)-2\cos(4x)+\cos(2x)+2\right)\,\mathrm{d}x\\
I &= \frac{1}{32}\left[-\frac{1}{6}\sin(6x)-\frac{1}{2}\sin(4x)+\frac{1}{2}\sin(2x)+2x\right]_0^{\pi/4}\\
I &= \frac{1}{32}\left(-\frac{1}{6}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)-\frac{1}{2}\sin(\pi)+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+2\times\frac{\pi}{4}\right)\\
I &= \frac{1}{32}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{32}\left(\frac{4}{6}+\frac{3\pi}{6}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{I=\frac{3\pi+4}{192}}$$

Exercice 2

1°) Soient a et b des réels.

- On pose : $t=-x$, de sorte que $x=-t$; La fonction $x\mapsto -x$ est bien de classe $\mathscr{C}^1$.
- On a $\mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$
- Si x vaut a, t vaut $-a$; si x vaut b, t vaut $-b$.

On a $I(a,b) = \displaystyle\int_a^b \frac{1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}(-\,\mathrm{d}x)$ donc :

$$\begin{aligned} I(a,b) &= \int_{-a}^{-b} \frac{1-(-t)^2}{((-t)^2+1)\sqrt{(-t)^4+1}}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-a}^{-b} \frac{-(t^2-1)}{(t^2+1)\sqrt{t^4+1}}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-b}^{-a} \frac{t^2-1}{(t^2+1)\sqrt{t^4+1}}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$\boxed{I(a,b) = I(-b,-a).}$$

2°) On a $I\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right) = \displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}} \frac{x^2-1}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}\,\mathrm{d}x.$

- On pose : $t = \dfrac{1}{x}$, de sorte que $x = \dfrac{1}{t}$.

  La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment formé par $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$: en effet, ce segment est soit inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, soit inclus dans $\mathbb{R}_-^*$ puisque a et b sont de même signe.
- On a $\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$
- Si x vaut $\frac{1}{a}$, t vaut a ; si x vaut $\frac{1}{b}$, t vaut b.

Ainsi :

$$\begin{aligned} I\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right) &= \int_a^b \frac{\left(\frac{1}{t}\right)^2 - 1}{\left(\left(\frac{1}{t}\right)^2+1\right)\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^4+1}} \frac{-1}{t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \frac{\frac{1-t^2}{t^2}}{\frac{1+t^2}{t^2}\sqrt{\frac{1+t^4}{t^4}}} \frac{-1}{t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \frac{1-t^2}{(1+t^2)\frac{\sqrt{1+t^4}}{\sqrt{t^4}}} \frac{-1}{t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \frac{t^2-1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^4}}\,\mathrm{d}t \qquad \text{car } \sqrt{t^4} = t^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{I\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right) = I(a,b).}$$

3°) Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Alors $\frac{1}{a}$ et a sont de même signe, donc, en appliquant le résultat de la question précédente avec $\frac{1}{a}$ et a, on obtient :

$$I\left(\frac{1}{\frac{1}{a}},\frac{1}{a}\right) = I\left(\frac{1}{a},a\right) \text{ i.e. } I\left(a,\frac{1}{a}\right) = I\left(\frac{1}{a},a\right)$$

Or $I\left(\frac{1}{a},a\right) = -I\left(a,\frac{1}{a}\right)$, puisque cela revient à échanger les bornes.

Ainsi $I\left(a,\dfrac{1}{a}\right) = -I\left(a,\dfrac{1}{a}\right)$ donc $2I\left(a,\dfrac{1}{a}\right) = 0$ donc $\boxed{I\left(a,\dfrac{1}{a}\right) = 0}$.