Corrigé du devoir maison 4.

Exercice 1

1°) Arctan est définie sur $\mathbb{R}$ et Arcsin est définie sur $[-1,1]$, donc, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
x \in \mathscr{D} &\iff \begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ \sqrt{1-x^2} \neq 0 \\ 2x\sqrt{1-x^2} \in [-1,1] \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 1-x^2 > 0 \\ |2x\sqrt{1-x^2}| \leq 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 1 > x^2 \\ \left(2x\sqrt{1-x^2}\right)^2 \leq 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x \in]-1,1[\\ 4x^2(1-x^2) \leq 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x \in]-1,1[\\ 0 \leq 4x^4 - 4x^2 + 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x \in]-1,1[\\ 0 \leq (2x-1)^2 : \text{toujours vrai} \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble de définition } \mathscr{D} \text{ de } f \text{ est }]-1,1[}$.

2°) ($\mathscr{D}$ est bien centré en 0.) Soit $x \in \mathscr{D}$.

$$\begin{aligned}
f(-x) &= 2\operatorname{Arctan}\left(-\frac{x}{\sqrt{1-(-x)^2}}\right) - \operatorname{Arcsin}\left(-2x\sqrt{1-(-x)^2}\right) \\
&= -2\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) + \operatorname{Arcsin}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) \text{ car Arcsin et Arctan sont impaires} \\
&= -f(x)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{f \text{ est impaire}}$.

3°)
- La fonction $x \mapsto 1-x^2$ est dérivable sur $]-1,1[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ sur cet intervalle ; par ailleurs, la fonction $X \mapsto \sqrt{X}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$; donc par composition, $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est dérivable sur $]-1,1[$. Donc $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ également par quotient.
  Comme Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, par composition, $x \mapsto \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ est dérivable sur $]-1,1[$.
- Nous venons de voir que $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est dérivable sur $]-1,1[$, donc $x \mapsto 2x\sqrt{1-x^2}$ aussi par produit.
  Comme Arcsin est dérivable seulement sur $]-1,1[$, on résout :

$$\begin{aligned}
2x\sqrt{1-x^2} = \pm 1 &\iff 4x^2(1-x^2) = 1 \\
&\iff (2x^2-1)^2 = 0 \\
&\iff x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Ainsi, sur $]-1,1[\setminus\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$, la fonction $x\mapsto 2x\sqrt{1-x^2}$ est dérivable et à valeurs dans $]-1,1[$, où Arcsin est dérivable. Par composition, la fonction $x\mapsto \operatorname{Arcsin}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$ est dérivable au moins sur $]-1,1[\setminus\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$.

- Par somme, $\boxed{f \text{ est dérivable au moins sur } \mathscr{D}\setminus\{x_1,x_2\}}$ en notant $\boxed{x_2=-\frac{1}{\sqrt{2}},\ x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}}$.

4°) On a alors, pour tout $x\in\mathscr{D}\setminus\{x_1,x_2\}$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2\frac{\sqrt{1-x^2}-x\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2} \\
&\qquad -2\left(\sqrt{1-x^2}+x\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)\frac{1}{\sqrt{1-(2x\sqrt{1-x^2})^2}} \\
&= 2\frac{1-x^2+x^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{1+\frac{x^2}{1-x^2}} \;-\; 2\frac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\sqrt{1-4x^2+4x^4}} \\
&= 2\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{1-x^2}{1-x^2+x^2} \;-\; 2\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\sqrt{(2x^2-1)^2}} \\
\boxed{f'(x)} &\boxed{= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\left(1-\frac{1-2x^2}{|1-2x^2|}\right)}
\end{aligned}$$

5°) Pour $x\in\mathbb{R}$, $1-2x^2>0 \iff x^2<\frac{1}{2} \iff -\frac{1}{\sqrt{2}}<x<\frac{1}{\sqrt{2}}$. Ainsi :

- Pour $x\in\left[0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$, on a $1-2x^2>0$ d'où $1-\frac{1-2x^2}{|1-2x^2|}=1-1=0$.
  Ainsi : $\forall\, x\in\left[0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right[,\ f'(x)=0$. Donc f est constante sur l'intervalle $\left[0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$.
  Comme $f(0)=2\operatorname{Arctan}(0)-\operatorname{Arcsin}(0)=0$, on a, $\boxed{\text{pour tout } x\in\left[0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right[,\ f(x)=0.}$
- $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=2\operatorname{Arctan}\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1-\frac{1}{2}}}\right)-\operatorname{Arcsin}\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}}\right)$
  donc $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=2\operatorname{Arctan}(1)-\operatorname{Arcsin}(1)=2\times\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}=0$. Ainsi, $\boxed{f \text{ est nulle sur } \left[0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right]}$.
- $\forall\, x\in\left]\frac{1}{\sqrt{2}},1\right[,\ 1-\frac{1-2x^2}{|1-2x^2|}=2$ d'où $f'(x)=\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}$.
  Comme $\left]\frac{1}{\sqrt{2}},1\right[$ est un intervalle, il existe une constante C telle que :

$$\forall\, x\in\left]\frac{1}{\sqrt{2}},1\right[,\quad f(x)=4\operatorname{Arcsin}(x)+C.$$

  $f(x)=2\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)-\operatorname{Arcsin}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)\underset{x\to 1}{\longrightarrow}2\times\frac{\pi}{2}-0$ par opérations sur les limites. Donc $f(x)\underset{x\to 1^-}{\longrightarrow}\pi$.

D'autre part, $4\operatorname{Arcsin}(x)+C \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} 4\times\dfrac{\pi}{2}+C = 2\pi+C$.
On en déduit (par unicité de la limite) : $2\pi+C=\pi$, c'est-à-dire $C=-\pi$.
Pour trouver C, on pouvait aussi évaluer en $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ qui est bien entre $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et 1 strictement.
Après calculs, $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\operatorname{Arctan}(\sqrt{3}) - \operatorname{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, simplifiable, de même que $4\operatorname{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+C$.
Donc $\boxed{\text{pour tout } x\in\left]\dfrac{1}{\sqrt{2}},1\right[,\ f(x)=4\operatorname{Arcsin}(x)-\pi.}$

6°) Soit $x\in]-1,0]$. Alors $f(x)=-f(-x)$ puisque f est impaire, et $-x\in[0,1[$.

- Si $x\in\left[-\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\right]$, alors $-x\in\left[0,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$, donc $f(-x)=0$ et donc $\boxed{f(x)=0}$ également.
- Si $x\in\left]-1,-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right[$, alors $-x\in\left]\dfrac{1}{\sqrt{2}},1\right[$ donc
  $f(x)=-f(-x)=-(4\operatorname{Arcsin}(-x)-\pi)=-(-4\operatorname{Arcsin}(x)-\pi)=\boxed{4\operatorname{Arcsin}(x)+\pi}$.

Exercice 2

1°) Notons $S=z^6-z^5+z^4-z^3+z^2-z+1$.
On a $S=(-z)^6+(-z)^5+(-z)^4+(-z)^3+(-z)^2+(-z)+(-z)^0$, et $-z\neq 1$, puisque $z\neq -1$ ($\frac{\pi}{7}$ n'est pas de la forme $\pi+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$). Donc :

$$\begin{aligned} S &= \frac{1-(-z)^7}{1-(-z)} \\ &= \frac{1-(-1)^7(e^{\frac{i\pi}{7}})^7}{1+z} \\ &= \frac{1+e^{i\pi}}{1+z} \end{aligned}$$

$$\boxed{z^6-z^5+z^4-z^3+z^2-z+1=0}$$

2°) On a donc :

$$\begin{aligned} z^6-z^5+z^4+1 &= z^3-z^2+z \\ z^3\left(z^3-z^2+z\right)+1 &= z^3-z^2+z \\ 1 &= \left(z^3-z^2+z\right)\left(1-z^3\right) \end{aligned}$$

Nécessairement $1-z^3\neq 0$ (sinon $1=0$), et on peut écrire : $\boxed{z^3-z^2+z=\dfrac{1}{1-z^3}.}$

3°) u est de module 1 donc il existe un réel θ tel que $u=e^{i\theta}$. On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-u}=\frac{1}{1-e^{i\theta}} &= \frac{1}{e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}}-e^{i\frac{\theta}{2}})} \\ &= \frac{e^{-i\frac{\theta}{2}}}{-2i\sin(\frac{\theta}{2})} \\ &= \frac{i\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)-i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}{2\sin(\frac{\theta}{2})} \\ &= \frac{1}{2}+\frac{i}{2}\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{1-u}\right)=\dfrac{1}{2}}$.

Autre méthode : $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{1-u}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1-u}+\dfrac{1}{1-\overline{u}}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1-\overline{u}+1-u}{1-\overline{u}-u+u\overline{u}}\right)=\dfrac{1}{2}$ car $u\overline{u}=1$.

4°) On a : $\cos\dfrac{3\pi}{7}-\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{\pi}{7}=\mathrm{Re}(e^{\frac{3i\pi}{7}}-e^{\frac{2i\pi}{7}}+e^{\frac{i\pi}{7}})=\mathrm{Re}(z^3-z^2+z)=\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{1-z^3}\right)$ à l'aide de la question 2.
Or z^3 est un complexe de module 1 (il s'écrit $e^{i\frac{3\pi}{7}}$), on sait déjà qu'il est différent de 1, donc, d'après la question précédente, $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{1-z^3}\right)=\dfrac{1}{2}$.
Finalement $\boxed{\cos\dfrac{3\pi}{7}-\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{\pi}{7}=\dfrac{1}{2}.}$

Exercice 3

1°) On a $Z=(1+i\sqrt{2})^n+\overline{(1+i\sqrt{2})^n}=(1+i\sqrt{2})^n+\overline{(1+i\sqrt{2})^n}$.
C'est de la forme $Z=u+\overline{u}$ avec $u\in\mathbb{C}$ donc $Z=2\mathrm{Re}(u)=2\mathrm{Re}\left((1+i\sqrt{2})^n\right)$.
Ainsi, $\boxed{Z\in\mathbb{R}}$.

2°) Pour tout $k\in\mathbb{N}$, $i^k+(-i)^k=(1+(-1)^k)i^k$.

- ★ Lorsque k est pair, alors k s'écrit $k=2p$ avec $p\in\mathbb{N}$ et $i^k+(-i)^k=(1+(-1)^{2p})i^{2p}=(1+1)(i^2)^p=\boxed{2(-1)^p}$.
- ★ Lorsque k est impair, alors k s'écrit $k=2p+1$ avec $p\in\mathbb{N}$ et $i^k+(-i)^k=(1+(-1)^{2p+1})i^{2p+1}=(1-1)i^{2p+1}=\boxed{0}$.

3°) D'après la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned}
Z&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}(i\sqrt{2})^k\ +\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}(-i\sqrt{2})^k\\
&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[(i\sqrt{2})^k+(-i\sqrt{2})^k\right]\\
&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[i^k+(-i)^k\right]\sqrt{2}^k\\
&=\sum_{\substack{0\le k\le n\\ k\text{ pair}}}\binom{n}{k}\left[i^k+(-i)^k\right]\sqrt{2}^k+\sum_{\substack{0\le k\le n\\ k\text{ impair}}}\binom{n}{k}\left[i^k+(-i)^k\right]\sqrt{2}^k\\
&=\sum_{0\le 2p\le n}\binom{n}{2p}2(-1)^p\sqrt{2}^{2p}\ \text{car}\ \begin{cases}i^k+(-i)^k\text{ est nul lorsque }k\text{ est impair}\\ i^{2p}+(-i)^{2p}=2(-1)^p\end{cases}\\
&=\sum_{0\le 2p\le n}\binom{n}{2p}2(-1)^p2^p
\end{aligned}$$

Ainsi, Z est une somme et produit d'entiers, c'est donc $\boxed{\text{un entier}}$.