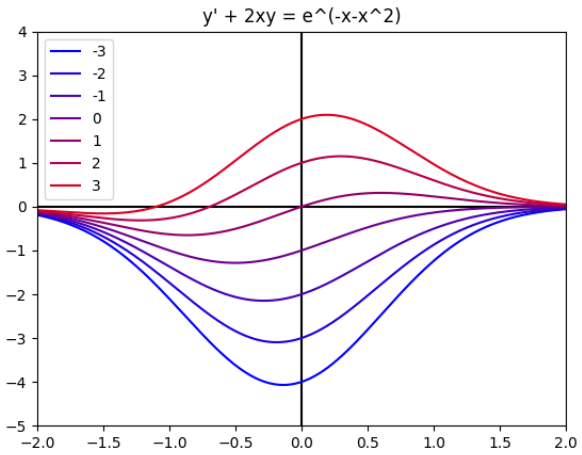
Chapitre 6. Approfondissements.

Ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, autrement dit on recherche uniquement des solutions à valeurs réelles.

1 Courbes intégrales, interprétation des problèmes de Cauchy

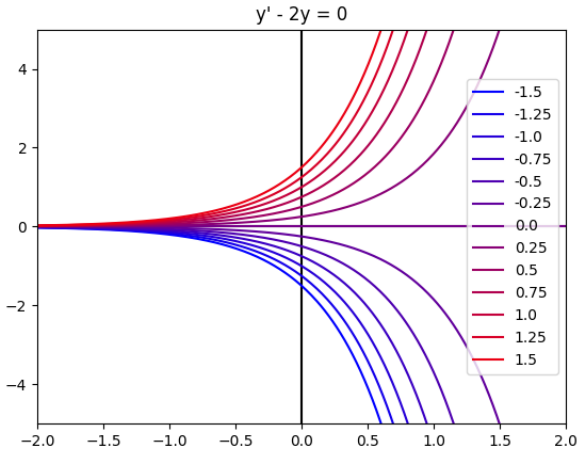
Si (E) est une équation différentielle et si f est une solution de (E) sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors le graphe de f s'appelle une courbe intégrale de l'équation (E).
Connaître ou représenter l'allure des courbes intégrales est souvent intéressant pour le mathématicien. Pour les EDL1 normalisées dont l'ensemble des solutions n'est pas vide, nous avons vu que l'ensemble des solutions fait intervenir un paramètre λ qui décrit $\mathbb{R}$. On peut alors représenter des courbes intégrales en python en prenant quelques valeurs de λ. Voyons deux exemples :

- Pour $(E_1) : y' + 2xy = e^{-x-x^2}$,
nous avons vu que les solutions sont les $x \mapsto \lambda e^{-x^2} - e^{-x-x^2}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
Voici quelques courbes intégrales :



On peut remarque que la courbe obtenue pour $\lambda = 0$ est la courbe représentative de la solution particulière que nous avions trouvée !

- Pour $(E_2) : y' - 2y = 0$, les solutions sont les $x \mapsto \lambda e^{2x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
Voici quelques courbes intégrales :



Pour $\lambda = 0$, la courbe obtenue est simplement l'axe des abscisses ; c'est tout à fait normal ! En effet, cela revient à dire que la fonction nulle est solution, ce qui est évident car l'équation était homogène.

Remarquez qu'aucune autre courbe intégrale ne rencontre l'axe des abscisses, ce qui signifie qu'à part la fonction nulle, aucune solution ne s'annule...

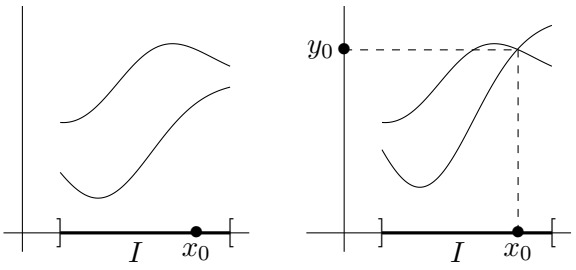
Interprétation du théorème sur les problèmes de Cauchy d'ordre 1

Rappel :

Théorème :

> Soit $(E) : y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$ avec a, $b : I \to \mathbb{R}$ continues, avec I intervalle.
> Pour tout $x_0 \in I$ et pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution y de (E) telle que $y(x_0) = y_0$.

Dire que la solution y vérifie $y(x_0) = y_0$, c'est dire que sa courbe représentative passe par le point (x_0, y_0).
Donc, le théorème dit que, pour tout point (x_0, y_0) du plan tel que $x_0 \in I$, il existe une unique courbe intégrale passant par ce point.



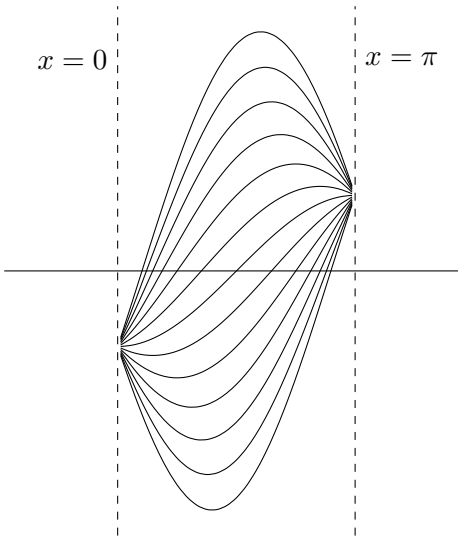
Possible Impossible !

Autrement dit :

deux courbes intégrales ne peuvent pas se couper !

Le phénomène s'observe sur les deux exemples de la page précédente : les courbes ne se croisaient pas ! [1]

Observons quelques courbes intégrales de l'équation (E) : $y'(x) - \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}y(x) = \dfrac{1}{\sin(x)}$ sur $I =]0, \pi[$:



Comme l'ensemble de définition de ces solutions est $]0, \pi[$, tout va bien, les courbes ne se rencontrent pas...

Par contre, (E) est équivalente à $\sin(x)y'(x) - \cos(x)y(x) = 1$, que l'on pourrait résoudre sur $[0, \pi]$; on peut montrer que toutes les solutions y sur $[0, \pi]$ vérifient $y(0) = -1$ et $y(\pi) = 1$, et qu'il y en a une infinité...
Autrement dit, si on ne prend pas une équation normalisée (coefficient 1 devant y'), le théorème de notre cours n'est plus valable.

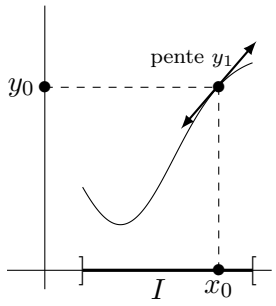
Conséquence pour les équations homogènes :
Le phénomène observé pour l'équation $y' - 2y = 0$ se généralise...
Si (E) est homogène, la fonction nulle est une solution, donc l'axe des abscisses est une courbe intégrale.
Comme aucune autre courbe intégrale ne peut couper cette courbe intégrale particulière, aucune solution ne s'annule en un point, à part la fonction nulle !

1. Certes, les fonctions solutions ont des limites nulles en $+\infty$ et/ou $-\infty$ (selon l'équation), elles se rapprochent les unes des autres, mais sans se toucher...

Interprétation du théorème sur les problèmes de Cauchy d'ordre 2

Théorème :

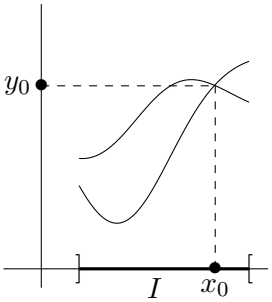
> Soit $(E) : ay'' + by' + cy = d(x)$ avec a, b, $c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, et $d : I \to \mathbb{R}$ continue, I intervalle. Pour tout $x_0 \in I$ et pour tout $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution y de (E) telle que $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$.



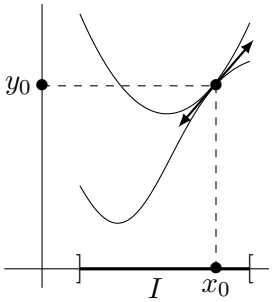
Dire que la solution y vérifie $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$, c'est dire que sa courbe représentative passe par le point (x_0, y_0) avec une pente égale à y_1.

Le théorème dit que pour tout $x_0 \in I$ et tout $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique courbe intégrale passant par (x_0, y_0) avec une pente de y_1.

Autrement dit, deux courbes intégrales peuvent se couper mais pas en étant tangentes !

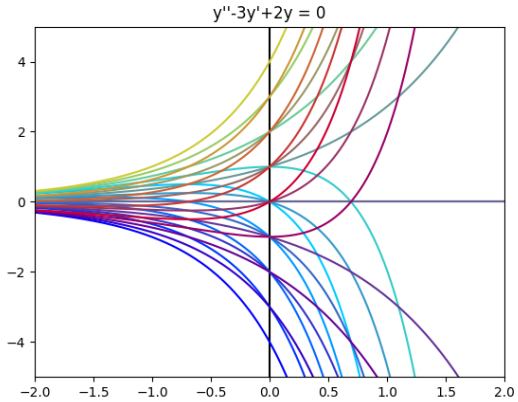


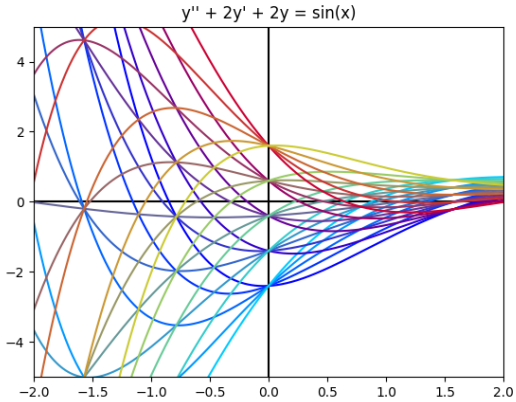
Possible

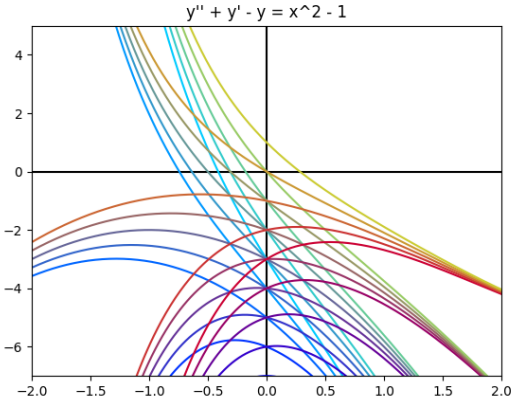


Impossible !

On peut observer le résultat pour quelques équations vues en cours :







2 Recollement/raccordement de solutions

Nous allons nous baser sur deux exemples d'EDL1 :

$$(E_1)\ :\ xy'(x)-y(x)=x^3 \quad \text{et} \quad (E_2)\ :\ xy'(x)+2y(x)=\text{Arctan}(x)$$

Nous sommes obligés, pour être dans le cadre du programme, de nous placer sur $\mathbb{R}_+^*$ ou sur $\mathbb{R}_-^*$ pour avoir des équations normalisées (coefficient 1 devant y'), mais on aurait aimé les résoudre sur $\mathbb{R}$...

- Pour (E_1) :
  On peut montrer (exercice !) que l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ est $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda x + \dfrac{x^3}{2} \end{array} \ / \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$
  et que l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}_-^*$ est $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_-^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda x + \dfrac{x^3}{2} \end{array} \ / \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.
  Peut-on en conclure que l'ensemble des solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}$ est $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda x + \dfrac{x^3}{2} \end{array} \ / \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$?
- Pour (E_2) :
  De même, on peut résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ et trouver une expression des solutions sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$ (exercice un peu plus long).
  On trouvera $x \mapsto \dfrac{\lambda}{x^2} + z_0(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, où $z_0 : x \mapsto \dfrac{1}{2}\text{Arctan}(x) - \dfrac{1}{2x} + \dfrac{\text{Arctan}(x)}{2x^2}$ (solution particulière).
  Cette fois, on est embêté par les termes avec x au dénominateur... on ne peut pas garder telle quelle l'expression obtenue sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ pour la forme générale des solutions sur $\mathbb{R}$...

De façon générale, il faut faire une analyse-synthèse pour trouver les solutions sur $\mathbb{R}$!

Traitons d'abord (E_2).

— (Analyse) Supposons que f soit une solution de (E_2) sur $\mathbb{R}$.

Alors en particulier, la restriction de f à $\mathbb{R}_-^*$ est solution de (E_2) sur $\mathbb{R}_-^*$ (elle est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et elle vérifie l'équation sur $\mathbb{R}_-^*$ puisque f vérifie l'équation sur $\mathbb{R}$!).

Donc il existe un réel λ tel que $\forall\, x \in \mathbb{R}_-^*,\ f(x) = \dfrac{\lambda}{x^2} + z_0(x)$.

De même sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient qu'il existe un réel μ tel que $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \dfrac{\mu}{x^2} + z_0(x)$.

⚠ Il est essentiel de comprendre qu'a priori, λ et μ n'ont aucune raison d'être égaux !

Méthode : Ensuite, il ne faut pas oublier que f doit être dérivable sur $\mathbb{R}$, et donc en particulier continue en 0, et dérivable en 0... c'est en exploitant cela qu'on trouve les éventuelles contraintes sur λ et μ, avant de passer à l'étape de synthèse.

Un calcul hors de votre portée [2] montrerait que $z_0(x) = \dfrac{1}{2}\text{Arctan}(x) - \dfrac{1}{2x} + \dfrac{\text{Arctan}(x)}{2x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

Donc la limite à gauche en 0 de $\dfrac{\lambda}{x^2} + z_0(x)$ sera celle de $\dfrac{\lambda}{x^2}$: elle sera infinie, sauf si $\lambda = 0$...

2. pour l'instant !

De même, la limite à droite en 0 de $\frac{\mu}{x^2} + z_0(x)$ sera celle de $\frac{\mu}{x^2}$: elle sera infinie, sauf si $\mu = 0$...

Comme il s'agit en fait des limites de f en 0 à gauche et à droite, elles sont égales à $f(0)$ par continuité de f. En particulier, elles doivent être finies. On peut conclure que $\lambda = \mu = 0$.

Finalement, si f est solution de (E_2) sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = z_0(x)$. Comme $z_0(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et que $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} f(0)$, on a $f(0) = 0$.

— (Synthèse) On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = z_0(x)$ et $f(0) = 0$.
On peut montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ entier (admettez-le, difficile à ce stade de l'année).
Une fois connue la dérivabilité, c'est très facile de voir que f est solution de (E_2) sur $\mathbb{R}$, car z_0 est solution sur $\mathbb{R}_+^*$, sur $\mathbb{R}_-^*$, et en 0, c'est évident : $0f'(0) + 2f(0) = \text{Arctan}(0)$ puisque $f(0) = 0$ et $\text{Arctan}(0) = 0$.

— Finalement, on peut conclure qu'il y a une unique solution à (E_2) sur $\mathbb{R}$!

Traitons maintenant (E_1).

— (Analyse) Supposons que f soit une solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$.

De même, f est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ donc il existe un réel λ tel que $\forall x \in \mathbb{R}_-^*$, $f(x) = \lambda x + \frac{x^3}{2}$ et il existe un réel μ tel que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \mu x + \frac{x^3}{2}$

$\lambda x + \frac{x^3}{2} \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} 0$ et $\mu x + \frac{x^3}{2} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$...

Ici les limites en 0 sont identiques, cela ne donne donc aucune contrainte sur λ et μ, mais cela donne tout de même $f(0)$:
Or, comme f est continue en 0, ces limites sont égales à $f(0)$. Ainsi, $f(0) = 0$.

Cette fois, il faut s'intéresser à la dérivabilité en 0 pour trouver une contrainte sur λ et μ...
Pour tout $x < 0$, $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\lambda x + \frac{x^3}{2}}{x} = \lambda + \frac{x^2}{2}$ donc $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} \lambda$.
Pour tout $x > 0$, $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\mu x + \frac{x^3}{2}}{x} = \mu + \frac{x^2}{2}$ donc $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \mu$.
Mais comme f est dérivable en 0, ces deux limites doivent être toutes les deux égales à $f'(0)$...
Donc $\lambda = \mu$.
Finalement, si f est solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$, alors il existe un réel λ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \lambda x + \frac{x^3}{2}$, et $f(0) = 0$ donc l'expression est même valable sur $\mathbb{R}$ entier.

— (Synthèse) On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lambda x + \frac{x^3}{2}$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ entier, et f est solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$, car $x \mapsto \lambda x + \frac{x^3}{2}$ est solution sur $\mathbb{R}_+^*$, sur $\mathbb{R}_-^*$, et en 0, c'est évident : $0f'(0) - f(0) = 0^3$ puisque $f(0) = 0$.

— Finalement, l'ensemble des solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}$ est bien $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda x + \dfrac{x^3}{2} \end{array} \ / \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ ...

⚠ Il y a beaucoup de situations différentes. Deux autres exemples :

- $(E_3) : xy'(x) - 3y(x) = -x^2$, l'expression des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ est $\lambda x^3 + x^2$.
  L'analyse-synthèse commence comme pour (E_1), sauf que les limites des taux d'accroissement de f en 0 à gauche et à droite sont toutes deux égales à 0 ! D'où aucune contrainte pour λ et μ.
  On trouve que les solutions de (E_3) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } x = 0 \\ \lambda x^3 + x^2 \text{ si } x < 0 \\ \mu x^3 + x^2 \text{ si } x > 0 \end{array} \right. \end{array} \quad , \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

- $(E_4) : x^2 y'(x) + xy(x) = 1 + 2x^2$, l'expression des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ est $\dfrac{\lambda}{x} + \dfrac{\ln(|x|)}{x} + x$.
  On trouve au début de l'analyse que les limites en 0 à gauche et à droite sont toujours infinies... donc c'est impossible d'avoir une solution sur $\mathbb{R}$!

Ces résultats peuvent s'anticiper en observant les courbes intégrales sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$: il faut qu'en prenant "une courbe sur $\mathbb{R}_-^*$" et "une courbe sur $\mathbb{R}_+^*$" on obtienne la courbe d'une fonction continue en 0 (les deux courbes doivent "se rejoindre en un point") et dérivable en 0 (elles doivent se rejoindre avec une même pente, "sans former une pointe").

