AP Rédaction / Raisonnement.

Exercice 1

Les phrases suivantes ne sont pas correctes mathématiquement : réécrivez-les de la bonne manière.

1°) « La fonction $e^x \sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. »

2°) « La fonction exp est continue pour tout $x \in \mathbb{R}$. »

3°) « $(\text{Arctan}(\ln x))' = \dfrac{1}{x}\dfrac{1}{1+(\ln x)^2}$ » , « $(\text{Arctan})'(\ln x) = \dfrac{1}{x}\dfrac{1}{1+(\ln x)^2}$ »

4°) « L'ensemble des primitives de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$ est $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = \frac{1}{3}x^3 + C\}$. »

5°) Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable :
« $f'(x) = 0$ donc $f(x) = C$ constante »

6°) Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on suppose $(*)$: $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x^2) = f(x) + f(2x)$.
« Soit $x = 0$: $(*) \iff f(0) = 2f(0) \iff f(0) = 0$ »

7°) « Soit $\theta \in \mathbb{R}$. $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$ donc $\cos(\theta) = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1$. »

Exercice 2 : Trouver les erreurs dans la récurrence

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2}$. Réécrire la récurrence :

On pose $\mathcal{P}(n)$: $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = 1 - \dfrac{1}{2^n}$.

$u_0 = 1 - \dfrac{1}{2^0} = 1 - 1 = 0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixé.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_n + 1}{2} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{2^n} + 1}{2} \text{ par HR} \\ &= \frac{2}{2} - \frac{1}{2 \times 2^n} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3

Les raisonnements ci-dessous sont incorrects : problème de rédaction et/ou de justifications.

1°) Énoncé de l'exercice : *Montrer que pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{2x}{1+x^2} \leq 1$.

Complétez le raisonnement :

$$\frac{2x}{1+x^2} \leq 1$$

$$2x \leq 1 + x^2$$

$$1 + x^2 - 2x \geq 0$$

$$(x-1)^2 \geq 0$$

$$\text{Donc } \frac{2x}{1+x^2} \leq 1.$$

2°) Énoncé de l'exercice : *Montrer que pour tout* $x \in \mathbb{R}_+$, $\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x} \in [0,1]$.

Réécrivez le raisonnement :

$$\begin{aligned} (\sqrt{x} - 1)^2 \geq 0 &\iff x + 1 - 2\sqrt{x} \geq 0 \\ &\iff x + 1 \geq 2\sqrt{x} \\ &\iff 1 \geq \frac{2\sqrt{x}}{x+1} \end{aligned}$$

Donc $\dfrac{2\sqrt{x}}{x+1} \in [0,1]$

3°) Énoncé de l'exercice : *Résoudre l'inéquation* (I) *:* $e^{-2x} - e^{-x} - 2 > 0$ *d'inconnue* $x \in \mathbb{R}$. .

Réécrivez le raisonnement :

$$\begin{aligned} & e^{-2x} - e^{-x} - 2 > 0 \\ \iff & X^2 - X - 2 > 0 \text{ avec } X = e^{-x} \end{aligned}$$

$\Delta = (-1)^2 + 4.2 = 9 = 3^2$
donc $X = \dfrac{1-3}{2} = -1$ ou $X = \dfrac{1+3}{2} = 2$,
$e^{-x} = -1$ ou $e^{-x} = 2$,
$x = -\ln(-1)$: impossible, ou $x = -\ln(2)$

Comme le coefficient dominant est positif, les solutions sont $x \in]-\ln(2), +\infty[$.

4°) Énoncé de l'exercice : *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Montrer que* $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2}$.

Réécrivez le raisonnement :

$$\begin{aligned} & k \leq 2n \\ \iff & \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n} \\ \iff & \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} \\ \iff & \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

5°) Énoncé de l'exercice : *Résoudre le système suivant :* $(S) : \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y \quad\quad = 0 \\ -x+3y \quad = 2 \end{cases}$

Réécrivez le raisonnement :

$$(S) \iff \begin{cases} x+y+z=1 \\ x=y \\ -x+3y=2 \end{cases}$$

Donc $-y+3y=2 \iff 2y=2 \iff y=1$.
On a donc $x=1$ et $1+1+z=1 \iff z=-1$.
Ainsi :

$$(S) \iff \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=-1 \end{cases}$$

L'unique solution est donc $(1,1,-1)$.

6°) Énoncé de l'exercice : *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Déterminer les racines nièmes de* i.
Réécrivez le raisonnement :

Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine $n$ième de i.

$$\begin{aligned} z^n = i &\iff z^n = e^{i\frac{\pi}{2}} \\ &\iff \left(\frac{z}{e^{i\frac{\pi}{2n}}}\right)^n = 1 \end{aligned}$$

Ainsi $\dfrac{z}{e^{i\frac{\pi}{2n}}}$ est une racine $n$ième de l'unité,
donc $\exists\, k \in \{0,\dots,n-1\}$, $\dfrac{z}{e^{i\frac{\pi}{2n}}} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$.

$$z^n = i \iff z = e^{i\frac{\pi}{2n}} e^{i\frac{2k\pi}{n}}$$

L'ensemble des racines $n$ièmes de i sont donc $\left\{e^{i\frac{(4k+1)\pi}{2n}} \ / \ k \in \{0,\dots,n-1\}\right\}$.