

Entraînement au calcul algébrique.

Les divers paramètres qui apparaissent (a, b, c, x, y, \dots) sont des réels.

On ne se préoccupera pas de l'existence des termes.

La calculatrice n'est pas autorisée.

Développements / factorisations

Question 1. Factoriser les expressions suivantes :

1°) $A = -5(x^2 - 4) + x^2 - 4x + 4 + (6x - 3)(x + 3)$

2°) $B = 16(2x + 7)^2 - 25(3x - 7)^2$

3°) $C = 10^{-3} \left(x^2 - \frac{1}{5}\right) - 10^{-4}x$

Question 2. Développer le plus efficacement possible :

1°) $A = (x^2 - 1)(x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1)$

2°) $B = (x^2 + (2 + \sqrt{2})x + 1 + \sqrt{2})(x^2 + (2 - \sqrt{2})x + 1 - \sqrt{2})$

Question 3. 1°) Montrer que, pour a, b, c réels : $a^2(c-b) + b^2(a-c) + c^2(b-a) = (a-b)(b-c)(c-a)$.

2°) Montrer que, pour a, b, c réels : $(a+b+c)^2 + (-a+b+c)^2 + (a-b+c)^2 + (a+b-c)^2 = 4(a^2+b^2+c^2)$

Quotients

Question 4. Simplifier :

$$A = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{2x}{1-x^2}$$

Question 5. Simplifier :

$$A = \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{x}{ab}\right)(x+a+b)}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{2}{ab} - \frac{x^2}{a^2b^2}} \quad B = \frac{2x+3}{2(2x-3)} + \frac{12x}{9-4x^2} + \frac{3-2x}{4x+6}$$

Racines

Question 6. Simplifier, pour $x \in]-1, 1[$, $A = \frac{\frac{1}{1+x} + \frac{1-x}{(1+x)^2}}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \left(1 + \frac{1-x}{1+x}\right)}$.

Question 7. Montrer que $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Question 8. Calculer A où $A = \sqrt{7-4\sqrt{3}} - \sqrt{7+4\sqrt{3}}$.

Question 9. Simplifier $A = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}}} \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$.

Puissances

Question 10. Écrire comme produit de puissances de nombres premiers : 7840.

Question 11. Parmi les nombres suivants, lesquels peuvent s'écrire sous la forme a^n avec a et n entiers ($n \neq 1$) ? Le cas échéant, déterminer a et n , avec n le plus grand possible.

$$12^3 \times 3^3 \quad 125^2 \times 3^6 \quad 3^3 \times 5^6 \quad 7^2 \times 2^3$$

Question 12. Simplifier, sans se préoccuper de l'existence :

$$A = \frac{-3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 8 \left(\frac{7}{2}\right)^2}{5 \left(\frac{2}{5}\right)^2 - 6 \left(\frac{4}{3}\right)^2}$$

Question 13. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, F_n = 2^{2^n} + 1$. F_n est appelé $n^{\text{ème}}$ nombre de Fermat.

Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $F_n(F_n - 2)$ et en déduire une relation de récurrence entre les nombres de Fermat.

Signe

Question 14. Déterminer le tableau de signes de $f : x \mapsto -e^x(x - 1) + e^{2x}(x - 1) - e^{x+2} + e^2$.

Dérivation « partielle »

Question 15. En donnant d'abord une forme rigoureuse à la question, dériver :

1°) $3a^2b + 5b$ par rapport à b

2°) $\sin^2(ab) + a \cos b$ par rapport à a

3°) $\exp(2xy) + \ln(1 + x^2 + y^2)$ par rapport à y