# Entraînement au calcul algébrique : solutions.

**Solution de la question 1**. $A = (x+3)(2x+5)$ $B = 7(9-x)(23x-7)$ $C = 10^{-3}\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{2}{5}\right)$

**Solution de la question 2**. $A = x^8 - 1$ $B = X^4 + 4x^3 + 4x^2 - 1$

**Solution de la question 4**. $A = \dfrac{-2}{x+1}$ et $B = 0$

**Solution de la question 5**. $A = ab$ et $B = 0$.

**Solution de la question 6**. $A = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

**Solution de la question 8**. $A = -2\sqrt{3}$

**Solution de la question 9**. $A = \dfrac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$

**Solution de la question 10**. $2^5 \times 5 \times 7^2$

**Solution de la question 12**. $A = -\dfrac{725}{74}$

# Entraînement au calcul algébrique : corrigé.

**Correction de la question 1.** **1°)**

$$\begin{aligned}
A &= -5(x^2-4)+x^2-4x+4+(6x-3)(x+3)\\
&= -5(x-2)(x+2)+(x-2)^2+3(2x-1)(x+3)\\
&= (x-2)\left(-5(x+2)+x-2\right)+3(2x-1)(x+3)\\
&= -4(x-2)(x+3)+3(2x-1)(x+3)\\
&= (x+3)\left(-4(x-2)+3(2x-1)\right)\\
&= \boxed{(x+3)(2x+5)}
\end{aligned}$$

**2°)**

$$\begin{aligned}
B &= 16(2x+7)^2-25(3x-7)^2 = (4(2x+7))^2-(5(3x-7))^2\\
&= (4(2x+7)-5(3x-7))\,(4(2x+7)+5(3x-7))\\
&= (-7x+63)(23x-7) = \boxed{7(9-x)(23x-7)}
\end{aligned}$$

**3°)** $C = 10^{-3}\left(x^2-\frac{1}{5}\right)-10^{-4}x = 10^{-3}\left(x^2-\frac{1}{5}-10^{-1}x\right) = 10^{-3}\left(x^2-\frac{1}{10}x-\frac{1}{5}\right)$

Le discriminant du trinôme du second degré en facteur vaut :

$\Delta = \dfrac{1}{100}+\dfrac{4}{5} = \dfrac{1+4\times 20}{100} = \dfrac{81}{100} = \left(\dfrac{9}{10}\right)^2$

Ses racines sont donc $\dfrac{\frac{1}{10}+\frac{9}{10}}{2} = \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{\frac{1}{10}-\frac{9}{10}}{2} = -\dfrac{2}{5}$. D'où : $F = \boxed{10^{-3}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(x+\dfrac{2}{5}\right)}$.

**Correction de la question 2.** **1°)**

$$\begin{aligned}
A &= (x^2-1)(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2+1)(x^2-x\sqrt{2}+1)\\
&= (x^2-1)(x^2+1)(x^2+1+x\sqrt{2})(x^2+1-x\sqrt{2})\\
&= (x^4-1)((x^2+1)^2-2x^2)\\
&= (x^4-1)(x^4+1)\\
&= x^8-1
\end{aligned}$$

**2°)**

$$\begin{aligned}
B &= (x^2+(2+\sqrt{2})x+1+\sqrt{2})(x^2+(2-\sqrt{2})x+1-\sqrt{2})\\
&= (x^2+2x+1+\sqrt{2}(x+1))(x^2+2x+1-\sqrt{2}(x+1))\\
&= ((x+1)^2+\sqrt{2}(x+1))((x+1)^2-\sqrt{2}(x+1))\\
&= (x+1)^4-2(x+1)^2\\
&= (x+1)^2((x+1)^2-2)\\
&= (x^2+2x+1)(x^2+2x-1)\\
&= (x^2+2x)^2-1\\
&= x^4+4x^3+4x^2-1
\end{aligned}$$

**Correction de la question 4**. $A = \dfrac{x+1}{(x-1)(x+1)} - \dfrac{x-1}{(x+1)(x-1)} + \dfrac{2x}{1-x^2}$
$= \dfrac{x+1-x+1}{x^2-1} - \dfrac{2x}{x^2-1} = \dfrac{2-2x}{x^2-1} = \dfrac{-2(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{-2}{x+1}$.

**Correction de la question 5**.

$$\begin{aligned} A &= \frac{\dfrac{b+a-x}{ab}(x+a+b)}{\dfrac{b^2+a^2+2ab-x^2}{a^2b^2}} \\ &= \frac{(b+a-x)(x+a+b)}{b^2+a^2+2ab-x^2}ab \\ &= ab \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{(2x+3)^2}{2(2x-3)(2x+3)} - \frac{24x}{2(2x-3)(2x+3)} + \frac{(3-2x)(2x-3)}{2(2x+3)(2x-3)} \\ &= \frac{(2x+3)^2 - 24x - (2x-3)^2}{2(2x-3)(2x+3)} \\ &= \frac{(2x+3-(2x-3))\,(2x+3+2x-3) - 24x}{2(2x-3)(2x+3)} \\ &= \frac{6.4x - 24x}{2(2x-3)(2x+3)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

**Correction de la question 6**.
$A = \dfrac{\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1-x}{(1+x)^2}}{\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\left(1 + \dfrac{1-x}{1+x}\right)} = \dfrac{\dfrac{1+x+1-x}{(1+x)^2}}{\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}\dfrac{1+x+1-x}{1+x}} = \dfrac{2}{(1+x)^2}\dfrac{1}{\dfrac{2\sqrt{1-x}}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}} = \dfrac{1}{(1+x)^{\frac{1}{2}}}\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$
$A = \dfrac{1}{\sqrt{(1+x)(1-x)}} = \boxed{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

**Correction de la question 7**. Calculons $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 = \dfrac{1+5+2\sqrt{5}}{16} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{8}$.
Comme $\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ est un nombre positif, on a bien $\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{8}} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

**Correction de la question 8**. Justifions d'abord que $A$ existe.
$(4\sqrt{3})^2 = 48 < 7^2 = 49$ donc $4\sqrt{3} < 7$ donc $7 - 4\sqrt{3} > 0$.
Calculons $A^2$ pour commencer.

$$\begin{aligned} A^2 &= \left(\sqrt{7-4\sqrt{3}} - \sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^2 \\ &= 7 - 4\sqrt{3} + 7 + 4\sqrt{3} - 2\sqrt{7-4\sqrt{3}}\sqrt{7+4\sqrt{3}} \\ &= 14 - 2\sqrt{(7-4\sqrt{3})(7+4\sqrt{3})} = 14 - 2\sqrt{49-48} = \boxed{12} \end{aligned}$$

$0 \leq 7 - 4\sqrt{3} < 7 + 4\sqrt{3}$ donc $\sqrt{7-4\sqrt{3}} < \sqrt{7+4\sqrt{3}}$. Ainsi, $A < 0$.
On en déduit que : $\boxed{A = -\sqrt{12} = -2\sqrt{3}}$.

**Correction de la question 9**.

$$A = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}}}\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+2}{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}}$$

**Correction de la question 10**. $7840 = 10\times 784 = 2\times 5\times 2\times(350+42) = 2^2\times 5\times 2\times(175+21) = 2^3\times 5\times 196 = 2^3\times 5\times 2\times 98 = 2^4\times 5\times 2\times 49 = \boxed{2^5\times 5\times 7^2}$

**Correction de la question 11**. $12^3\times 3^3 = (12\times 3)^3 = \boxed{36^3}$

$125^2\times 3^6 = \left(5^3\right)^2\times 3^6 = 5^6\times 3^6 = \boxed{15^6}$

$3^3\times 5^6 = 3^3\times\left(5^2\right)^3 = (3\times 25)^3 = \boxed{75^3}$.

$7^2\times 2^3$ ne peut pas s'écrire sous la forme voulue.

**Correction de la question 12**. $A = \dfrac{-3\left(\frac{2}{3}\right)^2+8\left(\frac{7}{2}\right)^2}{5\left(\frac{2}{5}\right)^2-6\left(\frac{4}{3}\right)^2} = \dfrac{-\dfrac{4}{3}+2\times 7^2}{\dfrac{4}{5}-2\dfrac{16}{3}} = \dfrac{\dfrac{2}{3}(-2+3\times 49)}{\dfrac{4}{15}(3-5\times 8)} = \dfrac{\dfrac{2}{3}\times 145}{\dfrac{4}{15}\times(-37)} = -\dfrac{2\times 145\times 15}{4\times 3\times 37} = -\dfrac{145\times 5}{2\times 37} = \boxed{-\dfrac{725}{74}}$

**Correction de la question 13**. Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}F_n(F_n-2) &= (2^{2^n}+1)(2^{2^n}-1)\\ &= \left(2^{2^n}\right)^2-1\\ &= 2^{2^n\times 2}-1\\ &= 2^{2^{n+1}}-1\\ &= F_{n+1}-2\end{aligned}$$

**Correction de la question 14**. $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}f(x) &= (x-1)(e^{2x}-e^x)-e^2(e^x-1)\\ &= e^x(x-1)(e^x-1)-e^2(e^x-1)\\ &= (e^x-1)(e^x(x-1)-e^2)\end{aligned}$$

On pose, $g(x) = e^x(x-1)-e^2 = xe^x-e^x-e^2$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
$g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x\in\mathbb{R}, g'(x) = e^x+xe^x-e^x = xe^x$.
De plus, $xe^x \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $g(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -e^2 < 0$.
$g(x) = e^x(x-1)-e^2 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g$ | $-e^2$ | $\searrow$ | $-1-e^2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

De plus $g(2) = 0$.

Par stricte croissance de $g$ sur $\mathbb{R}_+$, pour tout $x \geq 0$, $x < 2 \implies g(x) < g(2) = 0$ et $x > 2 \implies g(x) > 0$.

De plus, pour tout $x < 0, g(x) < 0$.

Ainsi,

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e^x - 1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $g(x)$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

**Correction de la question 15.** **1°)** Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé. On pose $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ b & \mapsto & 3a^2b + 5b \end{array}$.

$f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et somme de fonctions dérivables et, pour tout $b \in \mathbb{R}$,

$f'(b) = 3a^2 + 5$.

**2°)** Soit $b \in \mathbb{R}$ fixé. On pose $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ a & \mapsto & \sin^2(ab) + a\cos b \end{array}$.

$g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme, produit et composée de fonctions dérivables et, pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$g'(a) = 2b\sin(ab)\cos(ab) + \cos(b) = b\sin(2ab) + \cos(b)$

**3°)** Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On pose $h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \exp(2xy) + \ln(1 + x^2 + y^2) \end{array}$.

$h$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions dérivables et, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$h'(y) = 2xe^{2xy} + \dfrac{2y}{x^2 + y^2 + 1}$.