AP : Entraînement au calcul de dérivées - corrigé.

Exercice 1

1°) $f : x \mapsto \dfrac{(\ln x)^4}{x}$

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in\in \mathbb{R}_+^*$:

$$f'(x) = \frac{4.\dfrac{1}{x}(\ln x)^3 x - (\ln x)^4 .1}{x^2} = \frac{4(\ln x)^3 - (\ln x)^4}{x^2} = \boxed{(\ln x)^3 \frac{4 - \ln x}{x^2}}$$

2°) $f : x \mapsto \left(\cos^2 x + \frac{3}{2}\right)\sin(2x)$

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \boxed{\left(\cos^2 x + \frac{3}{2}\right) 2\cos(2x) - 2\sin(x)\cos(x)\sin(2x)}$$

3°) $f : x \mapsto \sin\left(\ln\left(1 + \dfrac{2}{x}\right)\right)$

Si $x > 0$, $1 + \dfrac{2}{x} > 1$ donc $f_3(x)$ existe.

Si $x < 0$, $1 + \dfrac{2}{x} > 0 \iff \dfrac{2}{x} > -1 \iff \dfrac{1}{-x} < \dfrac{1}{2} \iff -x > 2$ car $-x$ et 2 sont strictement positifs.

Le domaine de définition de f est donc $]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$. C'est aussi le domaine de dérivabilité.

Pour tout $x \in]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{-\dfrac{2}{x^2}}{1 + \dfrac{2}{x}} \cos\left(\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)\right) = \boxed{\frac{-2}{x(x+2)} \cos\left(\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)\right)}$$

4°) $f : x \mapsto \exp(\mathrm{sh}(x))$

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \boxed{\mathrm{ch}(x)\exp(\mathrm{sh}(x))}.$$

5°) $f : x \mapsto \dfrac{\cos x}{\sin x - x\cos x}$ (sans recherche du domaine de définition)

f est dérivable là où elle est définie (par somme, produit et quotient), et pour tout x dans son domaine de définition :

$$f'(x) = \frac{-\sin x(\sin x - x\cos x) - \cos x(\cos x + x\sin x - 1 \times \cos x)}{(\sin x - x\cos x)^2}$$
$$= \boxed{\frac{-\sin^2 x}{(\sin x - x\cos x)^2}}$$

6°) $f : x \mapsto (x^3 + x - 2)^4$

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \boxed{4(3x^2+1)(x^3+x-2)^3}$$

7°) $f : x \mapsto (1 + \sin x)^{\cos x}$

$f(x) = \exp\left(\cos x \ln(1+\sin x)\right)$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + \sin x \geq 0$, et $1 + \sin x = 0 \iff \sin x = -1 \iff x = \dfrac{-\pi}{2}[2\pi]$.
Donc f est définie sur $D = \mathbb{R} \backslash \left\{ -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z} \right\}$.
Par composition et somme de fonctions dérivables là où elles sont définies, f est dérivable sur D, et pour tout $x \in D$,

$$f'(x) = \boxed{\left(-\sin x \ln(1+\sin x) + \cos x \frac{\cos x}{1 + \sin x} \right) \exp\left(\cos x \ln(1+\sin x)\right)}$$

8°) $f : x \mapsto \dfrac{x^3 \sin(5x-1)}{\ln x}$

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$, et pour tout x dans cet ensemble,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(3x^2 \sin(5x-1) + x^3.5\cos(5x-1)\right)\ln x - x^3 \sin(5x-1)\dfrac{1}{x}}{(\ln x)^2} \\ &= \boxed{\frac{x^2 \sin(5x-1)\,(3\ln x - 1) + 5x^3 \cos(5x-1)\ln(x)}{(\ln x)^2}} \end{aligned}$$

9°) $f : x \mapsto \cos(\sin x) - \sin(\cos x)$

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \cos x \left[(-\sin)(\sin x)\right] - (-\sin x)\left[\cos(\cos x)\right] = \boxed{\sin x\,(\cos(\cos x)) - \cos x\,(\sin(\sin x))}$$

10°) $f : x \mapsto \tan(x^5)$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{\pi}{2} + k\pi > 0$ donc :

$$x^5 = \frac{\pi}{2} + k\pi \iff x = \sqrt[5]{\frac{\pi}{2} + k\pi}$$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\pi}{2} - k\pi < 0$ donc :

$$x^5 = \frac{\pi}{2} - k\pi \iff x = -\sqrt[5]{-\frac{\pi}{2} + k\pi}$$

Le domaine de définition de f, qui est aussi le domaine de dérivabilité de f, est donc :
$\mathbb{R} \backslash \left(\left\{ \sqrt[5]{\dfrac{\pi}{2} + k\pi} \ / \ k \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ -\sqrt[5]{-\dfrac{\pi}{2} + k\pi} \ / \ k \in \mathbb{N}^* \right\} \right)$
Pour tout x dans cet ensemble,

$$\boxed{f'(x) = 5x^4\left(1 + \tan^2(x^5)\right)}$$

(ou $\dfrac{5x^4}{\cos^2(x^5)}$).

Attention, $\tan^2(x^5)$ n'a rien voir avec $\tan(x^{10})$, cela désigne $\left(\tan(x^5)\right)^2$...

11°) $f : x \mapsto \text{Arctan}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, et pour tout x dans cet ensemble,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1\times(x+1)-x\times 1}{(x+1)^2}\frac{1}{1+\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2} \\ &= \frac{1}{(x+1)^2}\frac{1}{1+\dfrac{x^2}{(x+1)^2}} \\ &= \frac{1}{(x+1)^2}\frac{1}{\dfrac{(1+x)^2+x^2}{(x+1)^2}} \\ &= \boxed{\frac{1}{2x^2+2x+1}} \end{aligned}$$

Vous constaterez que l'expression $\dfrac{1}{2x^2+2x+1}$ existe pour $x=-1$: on n'en déduit pas pour autant que f est dérivable en -1, puisque f n'est même pas définie en -1 ! !

12°) $f : x \mapsto \left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)\sin\dfrac{1}{x}$

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et pour tout x dans $\mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(1-\frac{2x}{x^4}\right)\sin\frac{1}{x}+\left(x+\frac{1}{x^2}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\frac{1}{x} \\ &= \boxed{\left(1-\frac{2}{x^3}\right)\sin\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}\right)\cos\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

Il est intéressant de connaître la dérivée de $x\mapsto\dfrac{1}{x^2}$: c'est $x\mapsto\dfrac{2}{x^3}$.

Cela se trouve très vite en écrivant $\dfrac{1}{x^2}$ sous la forme x^{-2}, ce qui se dérive en $-2x^{-3}$...

13°) $f : x \mapsto \dfrac{e^{x-\frac{1}{x}}}{x^2-1}$

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1,0,1\}$, et pour tout x dans cet ensemble :

$$f'(x) = \frac{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)e^{x-\frac{1}{x}}(x^2-1)-e^{x-\frac{1}{x}}2x}{(x^2-1)^2} = \frac{\left((x^2+1)(x^2-1)-2x^3\right)e^{x-\frac{1}{x}}}{x^2(x^2-1)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{\left(x^4-2x^3-1\right)e^{x-\frac{1}{x}}}{x^2(x^2-1)^2}}$$

14°) $f : x \mapsto \ln\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)$

f est définie et dérivable sur $]-\infty,-\dfrac{2}{\pi}[$, sur $]\dfrac{2}{\pi},+\infty[$, et sur tous les intervalles de la forme $\left]\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2k\pi},\dfrac{1}{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}\right[$ ou $\left]\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}-2k\pi},\dfrac{1}{-\frac{\pi}{2}-2k\pi}\right[$ pour $k\in\mathbb{N}^*$.

Pour x dans l'un de ces ensembles,

$$f'(x) = \frac{\frac{-1}{x^2}\left(-\sin\frac{1}{x}\right)}{\cos\frac{1}{x}} = \boxed{\frac{1}{x^2}\tan\frac{1}{x}}$$

15°) $f : x \mapsto x^{(x^x)}$

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $x > 0$, $f'(x) = \exp\left(x^x \ln(x)\right) = \exp\left(\exp(x\ln x)\ln(x)\right)$.

Donc pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\exp(x\ln x)\frac{1}{x} + \left(x\frac{1}{x} + 1.\ln(x)\right)\exp(x\ln x)\ln(x)\right)\exp\left(\exp(x\ln x)\ln(x)\right)\\
&= \left(\frac{1}{x} + \ln(x) + \ln^2(x)\right)\exp(x\ln x)\exp\left(\exp(x\ln x)\ln(x)\right)\\
&= \left(\frac{1}{x} + \ln(x) + \ln^2(x)\right)x^x x^{(x^x)}\\
&= \boxed{\left(\frac{1}{x} + \ln(x) + \ln^2(x)\right)x^{x+x^x}}
\end{aligned}$$

Exercice 2 (Intermède)

La fonction $x \mapsto 2\sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et la fonction $x \mapsto x+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$.
Par quotient, $u : x \mapsto \dfrac{2\sqrt{x}}{x+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
D'après la question précédente, u est à valeurs dans $[0,1]$. Mais Arcsin n'est dérivable que sur $]-1,1[$. On résout donc, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned}
\frac{2\sqrt{x}}{x+1} = 1 &\iff 2\sqrt{x} = x+1\\
&\iff (\sqrt{x})^2 + 1 - 2\sqrt{x} = 0\\
&\iff (\sqrt{x}-1)^2 = 0\\
&\iff x = 1.
\end{aligned}$$

Donc, sur $\mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}$, u est dérivable et à valeurs dans $[0,1[$, donc à valeurs dans $]-1,1[$ où Arcsin est dérivable. Par composition, f est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1) - 2\sqrt{x}\times 1}{(x+1)^2}\,\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{x}}{x+1}\right)^2}}\\
&= \frac{\frac{x+1-2x}{\sqrt{x}}}{(x+1)^2}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x}{(x+1)^2}}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1-x}{\sqrt{x}(x+1)^2}\,\frac{1}{\sqrt{\dfrac{(x+1)^2-4x}{(x+1)^2}}} \\
&= \frac{1-x}{\sqrt{x}(x+1)^2}\,\frac{1}{\dfrac{\sqrt{x^2-2x+1}}{\sqrt{(x+1)^2}}} \\
&= \frac{1-x}{\sqrt{x}(x+1)^2}\,\frac{1}{\dfrac{\sqrt{(x-1)^2}}{(x+1)}} \qquad \text{car } x+1>0 \\
&= \frac{1-x}{\sqrt{x}(x+1)|x-1|}
\end{aligned}
$$

Remarque : ainsi, si $x \in]0,1[$, $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}(x+1)}$ et si $x \in]1,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{x}(x+1)}$.

Exercice 3

1°) $f : x \mapsto \sqrt{\tan(x)}$:

Pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $\tan(x)$ existe et $\tan(x) \geq 0$, donc $\boxed{f \text{ est bien définie sur } [0, \frac{\pi}{2}[}$.
Sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, tan est dérivable et est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ sur cet intervalle.
$x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
$\boxed{\text{Par composition, } f \text{ est dérivable sur }]0, \frac{\pi}{2}[}$.
Pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$,

$$f'(x) = \boxed{\frac{1+\tan^2(x)}{2\sqrt{\tan(x)}}}$$

2°) $f : x \mapsto \sqrt{x^2-3x-10}$:

$X^2 - 3X - 10$ est un trinôme du second degré de discriminant $\Delta = 9 + 40 = 7^2$, donc ses racines sont $\dfrac{3+7}{2} = 5$ et $\dfrac{3-7}{2} = -2$. Comme le coefficient de X^2 est positif, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$x^2 - 3x - 10 \geq 0 \iff x \in]-\infty, -2] \cup [5, +\infty[$$

Donc $\boxed{f \text{ a pour domaine de définition }]-\infty, -2] \cup [5, +\infty[.}$
$x \mapsto x^2 - 3x - 10$ est dérivable sur $]-\infty, -2[\cup]5, +\infty[$, et pour tout $x \in]-\infty, -2[\cup]5, +\infty[$, $x^2 - 3x - 10 > 0$. De plus $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Par composition, $\boxed{f \text{ est dérivable sur }]-\infty, -2[\cup]5, +\infty[.}$
Pour tout $x \in]-\infty, -2[\cup]5, +\infty[$,

$$f'(x) = \boxed{\frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x-10}}}$$

Soit $x \in]5, +\infty[$:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x) - f(5)}{x - 5} &= \frac{\sqrt{x^2 - 3x - 10}}{x - 5} \\
&= \frac{\sqrt{(x+2)(x-5)}}{x - 5} \\
&= \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-5}} \text{ car } x - 5 > 0 \text{ donc } x - 5 = \sqrt{x-5}^2 \\
\frac{f(x) - f(5)}{x - 5} &\underset{x \to 5}{\longrightarrow} +\infty
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en } 5}$.

Soit $x \in]-\infty, -2[$:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} &= \frac{\sqrt{x^2 - 3x - 10}}{x + 2} \\
&= \frac{\sqrt{(x+2)(x-5)}}{x + 2} \\
&= \frac{\sqrt{-x+5}\sqrt{-x-2}}{-\sqrt{-x-2}^2} \text{ car } x + 2 < 0 \text{ et } -x + 5 < 0 \\
&= \frac{\sqrt{-x+5}}{-\sqrt{-x-2}} \\
\frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} &\underset{x \to -2}{\longrightarrow} -\infty
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en } -2.}$

3°) $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{2-x}}$:

Pour tout réel x, $2 - x > 0 \Longleftrightarrow x < 2$. Donc $\boxed{f \text{ est définie sur }]-\infty, 2[}$.

$x \mapsto 2 - x$ est dérivable sur $]-\infty, 2[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ sur cet intervalle ; et $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$; donc par composition, $x \mapsto \sqrt{2-x}$ est dérivable sur $]-\infty, 2[$.

Par quotient ($x \mapsto x$ est dérivable sur $]-\infty, 2[$), $\boxed{f \text{ est dérivable sur }]-\infty, 2[}$.

Pour tout $x \in]-\infty, 2[$,

$$f'(x) = \frac{1 \times \sqrt{2-x} - x\dfrac{-1}{2\sqrt{2-x}}}{\sqrt{2-x}^2} = \frac{2(2-x) + x}{2\sqrt{2-x}(2-x)} = \boxed{\frac{4-x}{2\sqrt{2-x}(2-x)}}$$

Autre manière de faire le calcul : en écrivant $f(x) = x(2-x)^{-\frac{1}{2}}$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 1 \times (2-x)^{-\frac{1}{2}} + x \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times (-1) \times (2-x)^{-\frac{1}{2}-1} \\
&= (2-x) \times (2-x)^{-\frac{3}{2}} + \frac{x}{2}(2-x)^{-\frac{3}{2}} \\
&= \frac{2(2-x) + x}{2}(2-x)^{-\frac{3}{2}} \\
&= \boxed{\frac{4-x}{2}(2-x)^{-\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

4°) $f : x \mapsto \text{Arcsin}\left(e^{-x^2}\right)$:

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x^2 \leq 0$ donc $0 < e^{-x^2} \leq 1$, autrement dit $x \mapsto e^{-x^2}$ est à valeurs dans $]0,1]$.
Comme Arcsin est définie sur $[-1,1]$ qui contient $]0,1]$, $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$.
Pour tout réel x, $e^{-x^2} = 1 \iff -x^2 = 0 \iff x = 0$.
donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $e^{-x^2} \in]0,1[$, et $x \mapsto e^{-x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par composition.
Par ailleurs, Arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et donc sur $]0,1[$. Par composition, $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}^*}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = (-2x)e^{-x^2} \times \frac{1}{\sqrt{1-\left(e^{-x^2}\right)^2}} = \boxed{\frac{-2xe^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-2x^2}}}}$$

5°) $f : x \mapsto \text{Arccos}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$:

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1+x^2 \geq 1$ donc $\sqrt{1+x^2} \geq \sqrt{1} > 0$ donc $0 < \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1$. Comme Arccos est définie sur $[-1,1]$, $\boxed{f \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}}$.
$x \mapsto 1+x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, et $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par composition, $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, ainsi que $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ par quotient.
Arccos est dérivable sur $]-1,1[$.
Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \neq -1$, et $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 \iff 1+x^2 = 1 \iff x = 0$.
Par composition, $\boxed{f \text{ est donc dérivable sur } \mathbb{R}^*}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{-\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2} \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}} \\
&= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}(1+x^2)} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+x^2}}} \\
&= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}(1+x^2)} \frac{1}{\sqrt{\frac{1+x^2-1}{1+x^2}}} \\
&= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}(1+x^2)} \frac{1}{\frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{1+x^2}}} = \boxed{\frac{x}{|x|(1+x^2)}}
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$, $f'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$.

6°) $f : x \mapsto x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$:

Soit D le domaine de définition de f. Pour $x \in \mathbb{R}$, $x \in D \iff \begin{cases} x \neq -1 \\ \frac{x-1}{x+1} \geq 0 \end{cases}$

Le plus simple est de faire un tableau de signe :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{x+1}{x-1}$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

Donc $\boxed{D =]-\infty,-1[\ \cup\ [1,+\infty[}$.

Par quotient, $x \mapsto \dfrac{x-1}{x+1}$ est dérivable sur $]-\infty,-1[\ \cup\ ]1,+\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ sur cet ensemble, d'après le tableau de signe. Or $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc, par composition, puis produit avec $x \mapsto x$, $\boxed{f \text{ est dérivable sur }]-\infty,-1[\ \cup\ ]1,+\infty[}$.

$$\forall x \in\ ]-\infty,-1[\ \cup\ ]1,+\infty[,\quad f'(x) = 1 \times \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + x \times \frac{\dfrac{1\times(x+1)-(x-1)\times 1}{(1+x)^2}}{2\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}}$$
$$= \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \frac{2x}{(1+x)^2}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$
$$= \boxed{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \frac{x}{(1+x)^2}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}$$

Remarque : Attention pour les simplifications !

Si $x < -1$, $x+1$ et $x-1$ sont strictement négatifs, donc écrire $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$ est faux.

Mieux vaut écrire, lorsque $\frac{a}{b}$ est positif, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\left|\frac{a}{b}\right|} = \sqrt{\frac{|a|}{|b|}} = \frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}}$.

Pour tout $x \in\ ]-\infty,-1[\ \cup\ ]1,+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{\sqrt{|x-1|}}{\sqrt{|x+1|}} + \frac{x}{|1+x|^2}\frac{\sqrt{|x+1|}}{\sqrt{|x-1|}}$$
$$= \frac{\sqrt{|x-1|}}{\sqrt{|x+1|}} + \frac{x}{|1+x|\sqrt{|x+1|}}\frac{1}{\sqrt{|x-1|}}$$
$$= \frac{\left(\sqrt{|x-1|}\right)^2|1+x| + x}{|1+x|\sqrt{|x+1|}\sqrt{|x-1|}}$$
$$= \frac{|x-1|.|x+1| + x}{|1+x|\sqrt{|x+1|.|x-1|}}$$
$$= \frac{x^2-1+x}{|1+x|\sqrt{x^2-1}} \text{ car } x^2-1>0 \text{ sur }]-\infty,-1[\ \cup\ ]1,+\infty[$$

Étude en 1 : Pour tout $x \in\ ]1,+\infty[$, $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} - 0}{x-1} = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}} \underset{x\to 1}{\longrightarrow} +\infty$ Donc $\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en } 1}$.

7°) $f : x \mapsto x\sqrt{x}$:

f est clairement définie sur $\mathbb{R}_+$.

$x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ ainsi que $x \mapsto x$, donc par produit, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'(x) = x\frac{1}{2\sqrt{x}} + 1 \times \sqrt{x} = \boxed{\frac{3}{2}\sqrt{x}}$$

On le trouve encore plus vite en écrivant que $x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}}$ se qui se dérive en $\dfrac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}$...

Prouvons à part la dérivabilité en 0 (remarque : évaluer l'expression valable sur $\mathbb{R}_+^*$ est tout sauf une preuve!!) : pour tout $x > 0$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \sqrt{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

8°) $f : x \mapsto 10^{\sqrt{x}}$:

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{x}$ existe et est réel donc $f(x) = 10^{\sqrt{x}}$ existe, et c'est $\exp\left(\sqrt{x}\ln(10)\right)$.

$x \mapsto \sqrt{x}\ln(10)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par composition avec exp qui est dérivable sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'(x) = \boxed{\frac{\ln(10)}{2\sqrt{x}}\exp\left(\sqrt{x}\ln(10)\right)}$$

9°) $f : x \mapsto \sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt{(x-1)^3}$:

Pour tout $x \in [1, +\infty[$, $(x-1)^2 \geq 0$ et $(x-1)^3 \geq 0$ donc $f(x)$ existe.

On peut d'ailleurs écrire $f(x) = \left((x-1)^2\right)^{\frac{1}{3}} + \left((x-1)^3\right)^{\frac{1}{2}} = (x-1)^{\frac{2}{3}} + (x-1)^{\frac{3}{2}}$.

La fonction $x \mapsto x^{\frac{2}{3}} = \exp\left(\frac{2}{3}\ln x\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et sa dérivée est $x \mapsto \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$. De même $x \mapsto x^{\frac{3}{2}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction $x \mapsto x - 1$ est dérivable sur $]1, +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ sur cet intervalle, donc par composition et somme, $\boxed{f \text{ est dérivable sur }]1, +\infty[}$, et pour tout $x \in]1, +\infty[$,

$$\boxed{f'(x) = \frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}} + \frac{3}{2}(x-1)^{\frac{1}{2}}}$$

10°) $f : x \mapsto x\sqrt{2 - \sqrt{x}}$:

Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$f \text{ définie en } x \iff 2 - \sqrt{x} \geq 0 \iff 2 \geq \sqrt{x} \iff 4 \geq x \text{ car } \sqrt{x} \geq 0 \text{ et } 4 \geq 0$$

Donc f est $\boxed{\text{définie sur } [0, 4]}$.

$x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$x \mapsto 2 - \sqrt{x}$ est donc dérivable sur $]0, 4]$, et ne s'annule qu'en 4, donc par composition, $x \mapsto \sqrt{2 - \sqrt{x}}$ est dérivable sur $]0, 4[$.

Par produit avec la fonction polynomiale $x \mapsto x$, f est donc $\boxed{\text{dérivable sur }]0,4[}$, et pour tout $x \in]0,4[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{2-\sqrt{x}} + x\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{2-\sqrt{x}}} \\ &= \sqrt{2-\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{4\sqrt{2-\sqrt{x}}} \\ &= \frac{4(2-\sqrt{x})-\sqrt{x}}{4\sqrt{2-\sqrt{x}}} \\ &= \boxed{\frac{8-5\sqrt{x}}{4\sqrt{2-\sqrt{x}}}} \end{aligned}$$

• Étude de la dérivabilité en 0 : pour tout $x \in]0,4]$,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x\sqrt{2-\sqrt{x}}}{x} = \sqrt{2-\sqrt{x}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \sqrt{2}.$$

Donc $\boxed{f \text{ est dérivable en 0 et } f'(0)=\sqrt{2}}$. On peut remarquer que l'expression encadrée plus haut pour $x \in]0,4[$ est donc encore valable en 0 (puisqu'elle vaut $\sqrt{2}$ en 0 après simplifications...).

• Étude de la dérivabilité en 4 : pour tout $x \in [0,4[$,

$$\frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \frac{x\sqrt{2-\sqrt{x}}}{x-4} = -\frac{x\sqrt{2-\sqrt{x}}}{2^2-\sqrt{x}^2} = -\frac{x\sqrt{2-\sqrt{x}}}{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})} = -\frac{x}{\sqrt{2-\sqrt{x}}(2+\sqrt{x})}$$

Or $-\dfrac{x}{(2+\sqrt{x})} \underset{x\to 4}{\longrightarrow} -1$ et $\dfrac{1}{\sqrt{2-\sqrt{x}}} \underset{x\to 4}{\longrightarrow} +\infty$, donc $\dfrac{f(x)-f(4)}{x-4} \underset{x\to 4}{\longrightarrow} -\infty$.
Ainsi $\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en 4.}}$