AP : Entraînement au calcul de dérivées.

Exercice 1

✎ Consigne pour chacune des fonctions :

- Donner le domaine de définition et le domaine de dérivabilité (pas de justifications demandées)
- Calculer la dérivée

1°) $f : x \mapsto \dfrac{(\ln x)^4}{x}$

2°) $f : x \mapsto \left(\cos^2 x + \frac{3}{2}\right)\sin(2x)$

3°) $f : x \mapsto \sin\left(\ln\left(1 + \dfrac{2}{x}\right)\right)$

4°) $f : x \mapsto \exp\left(\mathrm{sh}(x)\right)$

5°) $f : x \mapsto \dfrac{\cos x}{\sin x - x\cos x}$ (sans recherche du domaine de définition)

6°) $f : x \mapsto (x^3 + x - 2)^4$

7°) $f : x \mapsto (1 + \sin x)^{\cos x}$

8°) $f : x \mapsto \dfrac{x^3 \sin(5x-1)}{\ln x}$

9°) $f : x \mapsto \cos\left(\sin x\right) - \sin\left(\cos x\right)$

10°) $f : x \mapsto \tan(x^5)$

11°) $f : x \mapsto \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

12°) $f : x \mapsto \left(x + \dfrac{1}{x^2}\right)\sin\dfrac{1}{x}$

13°) $f : x \mapsto \dfrac{e^{x-\frac{1}{x}}}{x^2-1}$

14°) $f : x \mapsto \ln\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)$

15°) $f : x \mapsto x^{(x^x)}$

Exercice 2 (Intermède)

Dans un problème d'écrit, on a montré à la question précédente que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\dfrac{2\sqrt{x}}{x+1} \in [0,1]$ (admettez-le, ne pas le démontrer).

Voici la question qui nous intéresse :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{x+1}\right)$.
Établir que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$ (on se servira du résultat précédent).

Un étudiant propose la réponse suivante, qui comporte des erreurs de rédaction et de raisonnement...

> Arcsin est dérivable sur $]-1,1[$;
> $x+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$;
> $2\sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0 ;
> et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:
>
> $$\begin{aligned} \frac{2\sqrt{x}}{x+1} = 1 &\iff 2\sqrt{x} = x+1 \\ &\iff (\sqrt{x})^2 + 1 - 2\sqrt{x} = 0 \\ &\iff (\sqrt{x}-1)^2 = 0 \\ &\iff x = 1. \end{aligned}$$
>
> Donc, par quotient et composition, f n'est pas dérivable en 0 et en 1.

Rectifier ici la réponse :

Calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$.

Exercice 3

✎ Consigne pour chacune des fonctions :

- Justifier soigneusement les dérivabilités en suivant les éventuelles consignes spécifiques
- Calculer la dérivée

Remarque : Si f est définie sur $\mathbb{R}$ et que la question est "montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$", on ne vous demande pas de montrer que f est non dérivable en 0.

En effet, la phrase "f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$" ne dit rien sur la dérivabilité en 0.

1°) $f : x \mapsto \sqrt{\tan(x)}$:

Justifier que f est définie sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et calculer $f'(x)$ pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

2°) $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 3x - 10}$:

Justifier que f est définie sur $]-\infty, -2] \cup [5, +\infty[$, dérivable sur $]-\infty, -2[\cup]5, +\infty[$, non dérivable en -2 et en 5, et calculer $f'(x)$ pour x dans $]-\infty, -2[\cup]5, +\infty[$.

3°) $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{2-x}}$:

Justifier que f est définie et dérivable sur $]-\infty, 2[$, calculer sa dérivée.

4°) $f : x \mapsto \mathrm{Arcsin}\left(e^{-x^2}\right)$:

Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et calculer $f'(x)$ pour x dans $\mathbb{R}^*$.

5°) $f : x \mapsto \mathrm{Arccos}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$:

Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et calculer $f'(x)$ pour x dans $\mathbb{R}^*$.

6°) $f : x \mapsto x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$:

Justifier que f est définie sur $]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[$, dérivable sur $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, non dérivable en 1, et calculer $f'(x)$ pour x dans $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

7°) $f : x \mapsto x\sqrt{x}$:

Justifier que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et calculer $f'(x)$ pour x dans $\mathbb{R}_+$.

8°) $f : x \mapsto 10^{\sqrt{x}}$:

Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et calculer $f'(x)$ pour x dans $\mathbb{R}_+^*$.

9°) $f : x \mapsto \sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt{(x-1)^3}$:

Justifier que f est définie $[1, +\infty[$, dérivable sur $]1, +\infty[$, et calculer $f'(x)$ pour x dans $]1, +\infty[$.

10°) $f : x \mapsto x\sqrt{2 - \sqrt{x}}$:

Justifier que f est définie sur $[0, 4]$, dérivable sur $[0, 4[$, non dérivable en 4, et calculer $f'(x)$ pour x dans $[0, 4[$.