AP Rédaction / Raisonnement.

Le quizz en ligne

1°) $\boxed{\text{A}}$ La fonction $e^x \sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{B}}$ La fonction $x \mapsto e^x \sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{C}}$ La fonction $e^x \sin x$ est dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{D}}$ La fonction $x \mapsto e^x \sin x$ est dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2°) $\boxed{\text{A}}$ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ (\text{Arctan}(\ln x))' = \dfrac{1}{x}\dfrac{1}{1+(\ln x)^2}$

$\boxed{\text{B}}$ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ (\text{Arctan})'(\ln x) = \dfrac{1}{x}\dfrac{1}{1+(\ln x)^2}$

$\boxed{\text{C}}$ $(\text{Arctan} \circ \ln)' : x \mapsto \dfrac{1}{x}\dfrac{1}{1+(\ln x)^2}$

$\boxed{\text{D}}$ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ (\text{Arctan} \circ \ln)'(x) = \dfrac{1}{x}\dfrac{1}{1+(\ln x)^2}$

3°) L'ensemble des primitives sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto x^2$ est :

$\boxed{\text{A}}$ $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = \frac{1}{3}x^3 + C\}$

$\boxed{\text{B}}$ $\left\{\frac{1}{3}x^3 + C \ / \ x \in \mathbb{R},\ C \in \mathbb{R}\right\}$

$\boxed{\text{C}}$ $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{3}x^3 + C \end{array} \ / \ C \in \mathbb{R}\right\}$

$\boxed{\text{D}}$ $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ \forall x \in \mathbb{R},\ \exists\, C \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{3}x^3 + C\}$

$\boxed{\text{E}}$ $\left\{x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + C \ / \ C \in \mathbb{R}\right\}$

$\boxed{\text{F}}$ $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ \exists\, C \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{3}x^3 + C\}$

4°) Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable :

$\boxed{\text{A}}$ $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 0$ donc, comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = C$ constante.

$\boxed{\text{B}}$ $f' = 0$ donc, comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, f est constante.

$\boxed{\text{C}}$ $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 0$ donc, comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, $\exists\, C \in \mathbb{R},\ f(x) = C$.

$\boxed{\text{D}}$ $f' = 0$ donc, comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, $\exists\, C \in \mathbb{R},\ f = C$.

$\boxed{\text{E}}$ $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 0$ donc, comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, $\exists\, C \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = C$.

5°) On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifie :
$(*) : \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x^2) = f(x) + f(2x)$.

$\boxed{\text{A}}$ Prenons $x = 0$: $(*) \iff f(0) = 2f(0) \iff f(0) = 0$

$\boxed{\text{B}}$ Remplaçons x par 0 dans $(*)$: on obtient $f(0) = 2f(0)$, d'où $f(0) = 0$.

$\boxed{\text{C}}$ Prenons $x = 0$ dans $(*)$: $f(0) = 2f(0) \iff f(0) = 0$

$\boxed{\text{D}}$ Prenons $x = 0$ dans $(*)$: $f(0) = 2f(0)$ donc $f(0) = 0$

6°) θ est un réel précédemment fixé dans l'exercice.

$\boxed{\text{A}}$ $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$ donc $\cos(\theta) = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1$.

$\boxed{\text{B}}$ $\cos(\theta) = \cos\left(2\frac{\theta}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1$.

$\boxed{\text{C}}$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$.
En évaluant cette égalité en $x = \frac{\theta}{2}$, on obtient : $\cos(\theta) = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1$.

$\boxed{\text{D}}$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$.
Donc, en posant $\theta = 2x$, on obtient : $\cos(\theta) = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1$.

7°) L'élève veut écrire une phrase de conclusion, son exercice consistait à résoudre une équation.

$\boxed{\text{A}}$ L'ensemble des solutions est $\{1, 2\}$.

$\boxed{\text{B}}$ L'équation est vérifiée en 1 et en 2.

$\boxed{\text{C}}$ L'équation est vérifiée pour $x = 1$ et $x = 2$.

$\boxed{\text{D}}$ Les solutions de l'équation sont $x = 1$ et $x = 2$.

$\boxed{\text{E}}$ Les solutions de l'équation sont les $x \in \{1, 2\}$.

$\boxed{\text{F}}$ Les solutions de l'équation sont 1 et 2.

$\boxed{\text{G}}$ L'ensemble des solutions sont 1 et 2.

La suite

1°) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2}$.

Trouvez les erreurs de raisonnement ou rédaction dans cette récurrence, et rectifiez-les à droite.

On pose $\mathcal{P}(n) : \forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = 1 - \dfrac{1}{2^n}$.

$u_0 = 1 - \dfrac{1}{2^0} = 1 - 1 = 0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixé.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_n + 1}{2} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{2^n} + 1}{2} \text{ par HR} \\ &= \frac{2}{2} - \frac{1}{2 \times 2^n} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2°) *Énoncé de l'exercice* : Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{2x}{1+x^2} \leq 1$.

Complétez le raisonnement :

$$\frac{2x}{1+x^2} \leq 1$$
$$2x \leq 1 + x^2$$
$$1 + x^2 - 2x \geq 0$$
$$(x-1)^2 \geq 0$$
$$\text{Donc } \frac{2x}{1+x^2} \leq 1.$$

3°) *Énoncé de l'exercice* : Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x} \in [0,1]$.

Réécrivez le raisonnement :

$$\begin{aligned}(\sqrt{x}-1)^2 \geq 0 &\iff x + 1 - 2\sqrt{x} \geq 0 \\ &\iff x + 1 \geq 2\sqrt{x} \\ &\iff 1 \geq \frac{2\sqrt{x}}{x+1}\end{aligned}$$

Donc $\dfrac{2\sqrt{x}}{x+1} \in [0,1]$

4°) *Énoncé de l'exercice* : Résoudre l'inéquation (I) : $e^{-2x} - e^{-x} - 2 > 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Réécrivez le raisonnement :

$$e^{-2x} - e^{-x} - 2 > 0$$
$$\iff X^2 - X - 2 > 0 \text{ avec } X = e^{-x}$$

$\Delta = (-1)^2 + 4.2 = 9 = 3^2$
donc $X = \dfrac{1-3}{2} = -1$ ou $X = \dfrac{1+3}{2} = 2$,
$e^{-x} = -1$ ou $e^{-x} = 2$,
$x = -\ln(-1)$: impossible, ou $x = -\ln(2)$

Comme le coefficient dominant est positif, les solutions sont $x \in]-\ln(2), +\infty[$.

5°) *Énoncé de l'exercice* : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2}$.

Réécrivez le raisonnement :

$$\begin{aligned} & k \leq 2n \\ \Longleftrightarrow & \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n} \\ \Longleftrightarrow & \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} \\ \Longleftrightarrow & \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

6°) *Énoncé de l'exercice* : Résoudre le système suivant : $(S) : \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y \quad\quad = 0 \\ -x+3y \quad = 2 \end{cases}$

Réécrivez le raisonnement :

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ x=y \\ -x+3y=2 \end{cases}$$

Donc $-y+3y=2 \Longleftrightarrow 2y=2 \Longleftrightarrow y=1$.
On a donc $x=1$ et $1+1+z=1 \Longleftrightarrow z=-1$.
Ainsi :

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=-1 \end{cases}$$

L'unique solution est donc $(1,1,-1)$.

7°) *Énoncé de l'exercice* : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les racines $n$ièmes de i.

Réécrivez le raisonnement :

Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine $n$ième de i.

$$\begin{aligned} z^n = i &\Longleftrightarrow z^n = e^{i\frac{\pi}{2}} \\ &\Longleftrightarrow \left(\frac{z}{e^{i\frac{\pi}{2n}}}\right)^n = 1 \end{aligned}$$

Ainsi $\dfrac{z}{e^{i\frac{\pi}{2n}}}$ est une racine $n$ième de l'unité,
donc $\exists\, k \in \{0,\dots,n-1\}$, $\dfrac{z}{e^{i\frac{\pi}{2n}}} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$.

$$z^n = i \Longleftrightarrow z = e^{i\frac{\pi}{2n}} e^{i\frac{2k\pi}{n}}$$

L'ensemble des racines $n$ièmes de i sont donc $\left\{e^{i\frac{(4k+1)\pi}{2n}} \;/\; k \in \{0,\dots,n-1\}\right\}$.